Francisco Pröschle

CURSO DE MATEMATICAS ELEMENTALES

ALGEBRA

NUEVA EDICION
REVISADA Y CON RESPUESTAS

CURSO

DE

Matemáticas Elementales

ÁLGEBRA

CORRESPONDIENTE A LOS AÑOS II - III - IV ENSEÑANZA

MEDIA

POR

FRANCISCO W. PRÖSCHLE

Ex-Profesor de matemáticas en el Instituto Nacional
y en la Escuela Militar

Texto arreglado conforme al programa oficial

CURSOS DE MATEMATICAS ELEMENTALES

ALGEBRA

NESTOR ALVAREZ EDITOR
Hecho el depósito que marca la
ley Nº 17.336
Inscripción Nº 53.351

Impreso en Prosa S.A.
Impreso en Chile /Printed in Chile

PREFACIO

El presente volumen completa el «Curso de Matemáticas Elementales» del Dr. Ricardo Poenisch. Comprende este tomo las materias del programa de *Algebra* para los años 4.°, 5.° y 6.° de humanidades y ha sido redactado consultando no sólo todas las cuestiones indicadas en el programa, sino también el espíritu de la enseñanza del ramo, expresado con claridad en las *observaciones* metodológicas que contiene el programa.

Es evidente que, alrededor de una idea fundamental, se puede tratar una serie de conocimientos que, a título de aplicaciones, se separan del lugar que les corresponde como números de un grupo de materias similares. Esta concentración de conocimientos varios exige un esfuerzo intelectual de los alumnos superior al que, por razones pedagógicas, se les debe imponer cuando se tratan materias nuevas para ellos. La asimilación de las ideas fundamentales se hace tanto más efectiva cuanto más simple es la presentación de estas ideas; pero tampoco hay conveniencia en que un texto llegue al extremo opuesto de detallar exageradamente una materia dada. Este detalle tiene su valor pedagógico en la disposición metódica de una clase del profesor sobre tal materia.

Por estas consideraciones, este texto no sigue exactamente la sucesión de materias del programa, sino que las reúne en capítulos que comprenden las cuestiones más estrechamente relacionadas para formar un grupo de conocimientos homogéneos.

Los párrafos principales van seguidos de ejercicios de aplicación; en otros números sólo se dan algunos ejercicios destinados a afianzar la interpretación de la teoría desarrollada, anotando al fin del capítulo ejercicios ordenados, en cuya resolución se expresará previamente el teorema que corresponde aplicar.

No es necesario resolver todos los ejercicios de un capítulo; basta tratar algunos ejercicios sucesivos de cada párrafo y después elegir otros sobre diferentes teoremas, en cualquier orden; de este modo se hace un repaso de todas las materias del capítulo y se consigue asegurar que los alumnos distingan las diversas verdades que tienen aplicación en estos ejercicios.

Abunda en el texto el desarrollo gráfico de las operaciones, pero sin abandonar el tratamiento algebraico de los teoremas.

Muchos de los ejercicios de este texto han sido tomados del tomo de Algebra de los «Elementos de Matemáticas Elementales» del doctor Poenisch, con la debida autorización del autor, a quien agradezco, además, sus oportunas observaciones sobre el plan y desarrollo de este libro.

Santiago, Enero de 1930.

FRANCISCO W. PROSCHLE.

NUEVOS PROGRAMAS

Se han acomodado las materias en este Texto al Nuevo Programa en los cursos IV, V y VI Año de Humanidades que comienza a regir en 1966 para IV Año, en 1967 para V Año y en 1968 para VI Año.

En el año 1965 el Programa es igual al de los años anteriores para estos tres cursos de Humanidades.

Se han señalado con un asterisco las materias que aún no rigen. Por ser temas interesantes para una mejor comprensión de las cuestiones matemáticas y necesarias en el ramo de Física, no se han suprimido en la presente Edición.

CUARTO AÑO

ARITMETICA

* 1) Números irracionales. Existencia y naturaleza de ellos. Raíz cuadrada aritmética. Cálculo de ella por medio de la regla de extracción aritmética. Raíz exacta y aproximada. Aproxi-

mación a la unidad y a un decimal. Vocabulario y símbolos. Comprensión de la igualdad siguiente:

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

2) Tablas de potencia y raíces. Se recomienda su uso.

3) Resolución de problemas sencillos que requieran el uso de irracionales.

ALGEBRA

1) *Monomios.* Definición. Grado. Operaciones fundamentales con monomios: adición, sustracción, multiplicación, división. Suma algebraica. Vocabulario y símbolos.

2) *Polinomios.* Reducción. Grado. Polinomio ordenado con respecto a una variable. Adición, sustracción, suma algebraica.

3) Operaciones con monomios y polinomios. Multiplicación y división de un polinomio por un monomio. Propiedades de estas operaciones. Distributividad de la multiplicación y división para la adición.

Descomposición de un monomio y de un polinomio en factores.

4) Multiplicación y división de polinomios. Identidades notables. Factorización.

5) Fracciones racionales. Amplificación y simplificación. Operaciones fundamentales: Adición, sustracción, multiplicación y división. Proporciones. Propiedades fundamentales.

6) Ecuaciones a inecuaciones* de 1.er grado. Problemas de aplicación. Ecuación de 1.er grado con dos o más incógnitas. Sistemas sencillos de 1.er grado. Problemas.

* 7) Noción de variables y función: variable in-

* Ver "Nuevos Programas" en Pág. 9

dependiente, función o imagen.

$x \xrightarrow{f} y$, o la expresión equivalente: $y = f\,(x)$

Estudio de la función

$y = ax + b$, o la expresión equivalente:

$ax + by = c$

Representación gráfica y variación. Resolución gráfica de sistemas de 1.er grado.

QUINTO AÑO

ARITMETICA Y ALGEBRA

1) Potencias y raíces. Definiciones de a^0; a^{-n}; $a^{\frac{m}{n}}$. Comprensión de la igualdad $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Operaciones y sus propiedades. Noción de logaritmo (base 10).

2) Revisión del conjunto de los números reales.

3) Repaso y profundización de los conceptos de proporcionalidad directa e inversa. *Representación gráfica y estudio de la variación de las funciones $\frac{y}{x} = k$; $xy = k$.

4) Ecuaciones de 2.° grado. Relación entre sus raíces y sus coeficientes.

Condiciones para que las raíces sean reales.

Existencia de raíces o soluciones que en algunos casos no pertenecen al conjunto de los números reales.

* 5) Representación gráfica y variación de la función $y = a\,x^2$. Sistemas sencillos de 2.° grado. Resolución gráfica. Problemas de aplicación.

* Ver "Nuevos Programas" en Pág. 9

PRIMERA PARTE

Correspondiente al cuarto año de Humanidades.

CAPITULO I

INTRODUCCION.

1. Cantidades literales. La distancia entre dos lugares, el peso de un objeto, la superficie de un patio, etc., son *cantidades*, porque se pueden medir. Para medir una cantidad es preciso compararla con otra de la misma especie, llamada *unidad de medida*. La comparación consiste en averiguar cuántas veces está contenida la unidad en la cantidad, y el resultado se expresa por un *número* que tiene la misma denominación de la unidad. Así, si un objeto pesa 35 kilogramos, significa que el kilogramo (la unidad) se repite 35 veces para completar el peso del objeto.

La aritmética estudia los números y las combinaciones a que dan lugar las operaciones fundamentales.

Entre las cuestiones del cálculo aritmético se presentan grupos de problemas que sólo se diferencian en los valores numéricos de los datos. Tales problemas se resuelven con el mismo razonamiento.

Ejemplo 1.—18 kg *de una mercadería valen* E° 72. *¿Cuánto valen* 30 kg *de esta mercadería?*

Razonamiento: Si 18 kg valen E° 72, uno valdrá la 18 ava parte de E° 72 $\left(\frac{E^\circ\ 72}{18}\right)$, y 30 kg valdrán 30 veces este valor, es decir,

$$\frac{E^\circ\ 72 \cdot 30}{18} = E^\circ\ 120.$$

Todos los problemas análogos a éste se resuelven haciendo el mismo razonamiento, con diferencia sólo de los valores de los datos.

Para formar un problema que comprenda todos los de la misma clase, designamos el número de unidades y sus valores por letras. El enunciado será entonces el siguiente:

El valor de m kilogramos de una mercadería es p escudos. ¿Cuánto valen n kilogramos de esta mercadería?

Razonamiento: Si *m* kilogramos valen *p* escudos, uno valdrá la *m* ava parte, lo que se escribe $\frac{p}{m}$ y *n* kilogramos valdrán *n* veces este valor, es decir,

$$\frac{p}{m} \cdot n.$$

Este resultado remplaza el razonamiento que en aritmética se hace en cada problema de esta categoría. Si designamos por *x* el valor pedido,

la solución del problema general se expresa por la *fórmula:*

$$x = \frac{p}{m} \cdot n.$$

Para los casos particulares basta sustituir en esta fórmula las letras por sus valores numéricos y ejecutar en seguida las operaciones.

Ejemplo 2.—*Calcular el interés de* E° 2 160 *en* 4 *años al* 5%.

Para mayor facilidad se disponen los datos como sigue:

E° 100....	1 año....	E° 5
2 160....	4 »	?

Haciendo el razonamiento conocido en aritmética, el interés pedido es:

$$\frac{5 \cdot 2\ 160 \cdot 4}{100} = E^\circ\ 432.$$

Si designamos por *c* el capital, por *n* el número de años y por *t* el tanto por ciento, el problema se enuncia:

Calcular el interés de c escudos en n años al t%.

Disposición de los datos:

E° 100......	1 año......	E° t
c......	n »	x (interés).

Razonamiento: Si E° 100 producen *t* escudos en un año, uno producirá la 100 ava parte, lo que se escribe $\frac{t}{100}$, y *c* escudos producirán *c* veces el interés de un escudo, y en *n* años producirán *n* veces este interés, es decir,

$$x = \frac{t \cdot c \cdot n}{100}.$$

Como en el ejemplo 1), la solución aritmética responde exclusivamente a la pregunta del caso particular contemplado en el problema, mientras que la solución general tiene aplicación para todas las cuestiones de la misma naturaleza; es una *solución algebraica*. El resultado del cálculo expresa, en forma sencilla y precisa la *regla* o la *fórmula* aplicable en la resolución de problemas que pertenezcan al mismo tipo.

De la designación de los datos de un problema general por letras, deriva el nombre de *cantidades literales*, en contraposición a *cantidades numéricas*, que se representan por la combinación de las cifras usadas en aritmética.

Notación algebraica.—El álgebra, a objeto de simplificar los resultados de las cuestiones relativas a los números, de enunciar con brevedad las reglas y de generalizar los problemas y las soluciones, representa las cantidades por las letras del alfabeto, como signos más universales. En esta notación se usan las letras aisladamente y en combinación con cifras.

Las cantidades conocidas de un problema, o sea, los *datos*, se representan por las primeras letras del alfabeto y las desconocidas, o sea, las *incógnitas*, se representan por las últimas letras.

Las operaciones se indican con los mismos signos usados en aritmética.

Sean a y b dos cantidades.

La *suma* de estas cantidades es $a+b$.

Como las letras a y b no tienen un valor determinado, la colocación del signo + (más) entre ellas, indica el procedimiento para sumarlas y el resultado.

La *diferencia* entre a y b es $a-b$. Para indicar la diferencia entre dos cantidades basta colocar el signo — (menos) entre ellas.

El *producto* entre a y b es $a \cdot b$, o simplemente ab. El punto (multiplicado por) para indicar el producto se usa sólo cuando los factores son numéricos, por ejemplo, $6 \cdot 3$.

El *cuociente* entre a y b es $a : b$ y también $\frac{a}{b}$.

El producto de factores iguales $4 \cdot 4 \cdot 4$ se escribe abreviadamente 4^3 y se lee 4 *elevado a* 3 ó 4 *al cubo*. El factor que se repite se llama *base*, el número que indica las veces que la base se repite, se llama *exponente* y el resultado se llama *potencia*. En a^4 la base es a y 4 el exponente.

Además, se usan los siguientes signos para indicar relación entre las cantidades: =, >, <.

El signo = (igual a) sirve para expresar la relación de *igualdad* entre dos cantidades:

$$x = a+b$$

significa x es igual a la suma de a con b. Las dos cantidades relacionadas con el signo = son los *miembros* de la igualdad. Toda la expresión que está a la izquierda del signo igual es el *primer miembro* y la que está a la derecha es el *segundo miembro*.

El signo > (mayor que) sirve para indicar que la cantidad de la izquierda del signo es mayor que la de la derecha:

$$a > b$$

significa que a es mayor que b.

El signo < (menor que) sirve para indicar que la primera cantidad es menor que la segunda:

$$b < a$$

significa que *b* es menor que *a*.

Las expresiones relacionadas por los signos > y < forman una *desigualdad*. Las dos partes de una desigualdad se llaman *miembros* de la desigualdad. La cantidad mayor está colocada siempre al lado de la abertura del signo.

Ejercicios.

1. ¿Cómo se forma el número entero que sigue de 7? ¿Cómo se obtiene el anterior?

¿Cuál es el número que sigue de a en el sistema de números enteros? ¿Cuál es el anterior?

2. Nombrar y escribir los números enteros que siguen de 15, de z, de 4z y los que preceden a los mismos números.

3. ¿Qué número tiene dos unidades, n unidades más que a? ¿Qué números tienen dos unidades, n unidades menos que a?

4. Expresar y escribir la suma y la diferencia de b y 1, de c y d, x e y.

5. ¿Cuántas unidades más tiene 15 que 8? Si p es mayor que m, ¿cuántas unidades más tiene p que m?

6. ¿Cuántas unidades más tiene a que a—b? ¿Cuántas unidades menos tiene a que a+b?

7. Un objeto comprado en E° 12 se vendió con E° 8 de ganancia. ¿En cuánto se vendió?

Un objeto comprado en m escudos se vendió con n escudos de ganancia. ¿En cuánto se vendió?

8. Un objeto comprado en E° 15 se vendió en E° 19. ¿Cuál es la ganancia?

Un objeto comprado en c escudos se vendió en v escudos. Si la venta es mayor que la compra, ¿cuál es la ganancia? Si el objeto se hubiera vendido con pérdida, ¿cuánto se habría perdido?

9. Un objeto se vendió en p escudos, ganando E° 9. ¿Cuánto había costado?

10. La suma de dos números es s y uno de los sumandos es a. ¿Cuál es el otro sumando?

11. Un comerciante vende en un día x metros de género, en el día siguiente vende 46 metros y en el tercer día 32 metros. ¿Cuántos metros vende en los tres días?

12. Si la edad actual de una persona es n años, ¿qué edad tenía 8 años antes? ¿qué edad tendrá 4 años después?

13. ¿Cuál es el doble de x, el triple de y, el cuádruplo de z?

14. Si un número cualquiera es n, ¿cómo se expresa un número par? Partiendo de la designación de un número par, ¿cómo se expresa un número impar?

15. ¿Cuántos centésimos hay en x escudos?

16. Indicar el producto entre 3 y a, entre $\frac{2}{3}$ y a, entre p y m, entre x e y.

17. Si un metro de género vale E° c, ¿cuánto valen 5 metros, n metros?

18. ¿Cuántos tercios hay en x enteros? ¿Cuántos cuartos hay en y enteros?

19. Si n hombres hacen un trabajo en 19 días, ¿en cuántos días hará el trabajo un hombre?

20. ¿Cuál es la cuarta parte de a? ¿Cuál es la n ava parte de a?

21. Si f metros de género valen E° p, ¿cuánto vale un metro?

22. El producto de dos números es c y uno de los factores es a. ¿Cuál es el otro factor?

23. ¿Cuántas veces y es x?

24. Calcular el interés de c escudos al t% en n meses.

3. Expresiones algebraicas; paréntesis.

Expresión algebraica es el conjunto de cantidades numéricas y literales relacionadas entre sí por los signos de las operaciones aritméticas.

Las partes de una expresión algebraica separadas por los signos + (más) o — (menos) se llaman *términos* de la expresión. *Término es entonces una cantidad aislada o separada de otras por el signo* + o —.

En un término hay que distinguir los siguientes elementos:

1.° *El factor literal*, que es la letra con su exponente. En el término $6a^2$ el factor literal es a^2.

2.° *El coeficiente*, que es el factor numérico, indica las veces que el factor literal se repite como sumando. En el término $6a^2$ el coeficiente es 6. El coeficiente puede ser también una letra. En el término *mx* el coeficiente es *m*. El coeficiente 1 no se escribe ni se lee. En el término *a* el coeficiente es 1.

3.° *El signo*, que precede al término, que puede ser + o —.

El nombre particular de una expresión algebraica depende del número de términos que tenga.

Monomio es la expresión algebraica de un solo término. 7a, $\dfrac{a+b}{n}$ son monomios.

Binomio es la expresión algebraica de dos términos. Un binomio puede ser la suma o la diferencia de dos términos. 3a+b, x—2y son binomios.

Polinomio es la expresión algebraica de dos o más términos. Un polinomio de tres términos se llama *trinomio*.

Ordenar un polinomio es disponer sus términos de modo que los exponentes de la misma letra, llamada *ordenatriz*, aumenten o disminuyan sucesivamente.

El polinomio $5x^4-7x^3y+x^2y^2-3xy^3+y^4$ está ordenado según las *potencias descendentes* de x y según las *potencias ascendentes* de y.

Si en una expresión algebraica se sustituyen las letras por valores numéricos y se ejecutan las operaciones indicadas, el resultado es el *valor numérico* de la expresión.

A fin de fijar el orden en que se ejecutan las operaciones, al valorar una expresión algebraica, analicemos los ejemplos siguientes:

1) a+bc
2) a—b : c

y para el cálculo demos a las letras los valores siguientes: a=18, b=10, c=2.

Sustituyendo, los ejemplos serán:

1) 18+10 . 2.
2) 18—10 : 2.

Si no existiera un convenio sobre preferencia de las operaciones, se vacilaría entre los dos cálculos siguientes:

1.° Multiplicar 10 . 2 y agregar 18 al producto, lo que da:

18+20=38.

2.° Sumar 18 con 10 y multiplicar la suma por 2, lo que da:

$$28 \,.\, 2=56.$$

En el segundo ejemplo se tendría, ejecutando primero la división:

$$18—5=13.$$

Restando primero 10 de 18 y dividiendo la diferencia por 2, se tendrá:

$$8 : 2=4.$$

Pero se establece el convenio de adoptar el primer cálculo; de manera que para preferir el segundo cálculo es necesario *encerrar entre paréntesis* la suma en el primer ejemplo y la diferencia en el segundo. Las expresiones se escriben entonces de este modo:

1) $(a+b)c.$
2) $(a—b) : c.$

La expresión entre paréntesis significa, según esto, que se debe considerar como una sola cantidad y, al valorar la expresión, calcular primero el valor de tal cantidad.

De aquí resulta la siguiente:

Regla.—*Para calcular el valor numérico de una expresión algebraica sin paréntesis, se efectúan primero las multiplicaciones y divisiones y en seguida las adiciones y sustracciones.*

Si hay paréntesis, se principia por calcular la expresión entre paréntesis y en seguida como lo indica la primera parte de esta regla.

A veces en la división, el paréntesis es remplazado por la raya de fracción, por ejemplo

$$(a+b) : (c—d)$$

lo que se puede escribir:

$$\frac{a+b}{c—d}.$$

En casos más complicados se emplean paréntesis múltiples.

Se trata, por ejemplo, del siguiente problema: *Dividir cierta suma de dinero en* **n** *partes iguales, de modo que cada una de ellas sea igual a una cantidad de* **a** *escudos aumentada en sus intereses anuales al* **t**%, *más* **b** *escudos. ¿Cuál es la suma de dinero?*

Se calcula primero el valor de una parte.

Un peso gana en un año $\frac{t}{100}$ y se convierte, con sus intereses, en $1+\frac{t}{100}$.

Los *a* escudos se convertirán en *a* veces esta cantidad, es decir, en

$$\left(1+\frac{t}{100}\right) . a.$$

Agregando los *b* escudos, se tiene que cada parte vale:

$$\left(1+\frac{t}{100}\right) . a + b.$$

Las n partes valdrán n veces este valor, es decir:

$$\left[a\left(1 + \frac{t}{100}\right) + b \right] n.$$

Para valorar esta expresión, designemos por x la suma dividida y hagamos

$$n=3,\quad a=80,\quad t=5,\quad b=60.$$

Sustituyendo y calculando resulta sucesivamente:

$$\begin{aligned} x &= [80\ (1+0{,}05)+60]\ 3 \\ &= [80\ .\ 1{,}05+60]\ 3 \\ &= [84+60]\ 3 \\ &= 144\ .\ 3=432. \end{aligned}$$

Ejercicios.

1. Mencionar los elementos de los términos $15a$, $-16x^2$, $+\frac{3}{4}y$, $-pz$.

2. ¿Qué expresiones son: a, $14x$, $\frac{3x-7}{2}$, $5(p+q)$, $9a-7$, $4m-5n+30$?

3. ¿Qué expresiones son las siguientes y qué nombre tienen como resultado de operación:

$23x$, $20a-c$, $2p+5$, $9(8x+1)$, $\frac{3x+z}{5}$?

4. Escribir polinomios: a) de dos términos; b) de tres términos; c) de cuatro términos.

5. Ordenar los polinomios siguientes:

a) $3x^2-6x+5x^3+x^4-1$;
b) $7-y^3+y+5y^5+9y^4-3y^2$;
c) $z^2-8z+5z^4-3+2z^3$;
d) $16a^2b^2-9a^3b+4ab^3+7a^4+b^4$.

6. Escribir algebraicamente:
a) 7 veces la suma de $3a$ y $4b$;
b) 8 veces la diferencia entre x e y;
c) la cuarta parte de $c+d$;
d) el producto de $x+4$ por $x-5$;
e) un número x aumentado en 4 se multiplica por 3, se resta 5 del producto y la diferencia se multiplica por 2.

7. Expresar algebraicamente, según el sistema décuplo, un número: a) de las cifras x, y; b) de las cifras x, y, z. Expresar los números invertidos.

8. Calcular:

a) $18-3\ .\ 2+4$;	b) $18-(3\ .\ 2+4)$;
c) $(18-3)\ .\ 2+4$;	d) $18-3(2+4)$;
e) $(18-3)\ .\ (2+4)$;	f) $(18-3\ .\ 2)+4$;
g) $20-10:2+8$;	h) $20-10:(2+8)$;
i) $36-4\ .\ 3+6:3$;	j) $(36-4)\ .\ 3+6:3$.

Calcular el valor numérico de las siguientes expresiones:

9. $\left.\begin{array}{l} a+bc-d \\ (a+b)c-d \\ (a+b)\ (c-d) \\ a+b(c-d) \end{array}\right\}$ si $\begin{array}{l} a=15 \\ b=10 \\ c=20 \\ d=16. \end{array}$

10. $6a+5b-4c$, si $a=5$, $b=4$, $c=11$.
11. $a^2+2ab+b^2$, si $a=8$, $b=7$.
12. $a^2-2ab+b^2$, si $a=15$, $b=5$.
13. $a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$, si $a=5$, $b=2$, $c=3$.
14. $(a+b)\ (a-b)-(a^2-b^2)$, si $a=10$, $b=5$.
15. $(3a+4b)\ (4b-3a)-36a^2b$, si $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{2}$.
16. $\frac{5a^2b^2}{2}-\frac{4a^4b^2}{9}+\frac{a^4}{8}$, si $a=2$, $b=3$.
17. $a(b+c)+b\ (a+c)+c(a+b)$, si $a=2$, $b=3$, $c=4$.

18. $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+ab+b^2} + \dfrac{2a+5b}{2b-c} + \dfrac{a^2-c^2}{a+2b+c}$, si $a=5$, $b=3$, $c=1$.

4. Números relativos.

Se trata de medir una longitud de 4 cm sobre una recta indefinida, a partir de un punto O de ella (fig. 1).

Fig. 1

Esta longitud puede ser medida en dos sentidos opuestos a partir del punto O; en un sentido se determina el punto A y en el sentido opuesto el punto B. Es evidente que para determinar la posición de un punto sobre una recta indefinida no basta conocer su distancia al punto elegido como origen, sino, además, el sentido en que se ha de aplicar la longitud. Para distinguir un sentido del otro convenimos en llamar *sentido positivo* al que se dirige de izquierda a derecha, a partir del origen y *sentido negativo* al opuesto. El sentido positivo se indica en las notaciones con el signo + y el sentido negativo con el signo —.

El valor algebraico del segmento OA es + 4 *cm* y el del segmento OB es — 4 *cm*.

El símbolo formado por un número ordinario y su signo se llama *número relativo*, que es *positivo* cuando está precedido del signo + y *negativo* cuando está precedido del signo —.

Los números relativos simplifican la expresión del lenguaje y abrevian la notación. Así, en vez de decir que el punto A está a una distancia de 4 cm a la derecha del punto O, se dice que dista + 4 cm de O, y en lugar de decir que el punto B está a una distancia de 4 cm a la izquierda del punto O, se dice que dista — 4 cm de O.

En un número relativo hay que distinguir *el valor absoluto*, que es el número de unidades que lo componen, y el *signo*. El valor absoluto de + 4 es 4 y el de —4 es también 4. El signo de un número relativo no indica operación, sino que debe considerarse como parte integrante de un número relativo.

Los números relativos se pueden representar gráficamente sobre una recta indefinida, llamada *eje*, en la cual el punto de origen corresponde a cero (fig. 2).

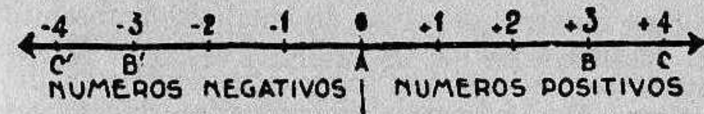


Fig. 2

Para determinar los puntos, supongamos que se ha elegido el centímetro como unidad de longitud y el punto A como origen. A cada punto del gráfico corresponde un número relativo, que se llama la *abscisa* del punto. El valor absoluto de la abscisa de un punto cualquiera del eje es el número (entero o fraccionario) que expresa la distancia del origen al punto y el signo corresponde al sentido en que hay que dirigirse desde el origen al punto. El sentido positivo es desde el origen a la derecha y el negativo desde el origen a la izquierda.

La abscisa del punto B es + 3 y la del punto B′ es — 3. Las abscisas positivas están en la parte derecha del eje, a partir del origen y las negativas en la parte izquierda.

Recíprocamente, a cada número relativo corresponde un punto determinado del eje, por ejemplo, al número + 4 corresponde el punto C, que se obtiene contando 4 cm desde el origen a la derecha; al número —4 corresponde el punto C′, distante 4 cm a la izquierda del origen.

En cuanto al número cero, hay que advertir que su significado es de límite entre los números positivos y negativos, no se le atribuye signo, o se le puede colocar arbitrariamente el signo + o —; + 0 y — 0 significan lo mismo.

Los números relativos de igual valor absoluto y de signos contrarios, como + 4 y — 4, son *simétricos*, puesto que sus puntos equidistan del origen. Dos números simétricos se diferencian en el duplo del valor absoluto de uno de ellos. La diferencia entre + 4 y — 4 es 8, que es efectivamente la distancia que sus puntos correspondientes tienen entre sí en el gráfico.

5. En la determinación de la temperatura encontramos otra explicación de los números relativos. El eje es la escala termométrica y el origen es el punto cero, que corresponde a la temperatura del hielo fundente. Desde cero hacia arriba

se tiene el sentido positivo y desde cero hacia abajo, el sentido negativo. Una temperatura de + 15° quiere decir 15° sobre cero y una temperatura de — 3° significa 3° bajo cero.

Análogamente se explican los números relativos con las demás cantidades que se pueden valorar en dos sentidos opuestos.

Ejercicios.

Con referencia al gráfico de los números relativos, resolver los ejercicios siguientes:

1. ¿Cuáles son los puntos correspondientes a +8, +15, —6, —10, respecto al origen cero, si la unidad de longitud es el centímetro?

2. Considerando como origen el punto correspondiente a +3, ¿a qué distancia de cero están los números +7, +20, —2, —8, —10?

3. Si el origen es el punto correspondiente a —5, ¿a qué distancia de cero están los números —4, —9, +10, +17?

4. ¿Qué camino hay que recorrer en el gráfico de los números relativos en las expresiones:

a) —2+5—3+4; b) 6—9+5+3—12?

Hágase el cálculo en cualquier orden para dejar establecido gráficamente que el orden de los sumandos no altera la suma.

5. ¿Qué número es igual a —2+4, a —5+8, a —7—10, a —2—6?

6. Comparar en su valor absoluto y relativo los números +5 y —6, —3 y —8.

7. ¿Qué significa que una persona tenga —E° 35? que gane —E° 40 en un negocio?

8. ¿Cómo se anota algebraicamente una ganancia de E° 245, una pérdida de E° 120?

9. Si la temperatura en un instante es —2°, ¿cuántos grados debe subir para llegar a + 7°?

5. Términos semejantes.

Se llaman términos semejantes los que tienen el mismo factor literal. Los términos $7a^2b - 3a^2b - 5a^2b$ son semejantes. El factor literal es a^2b.

Reducir términos semejantes es reunirlos en un solo término, del mismo modo como dos o más números homogéneos se expresan en un solo número.

Ejemplos: *a*) 3 + 5 — 6.

A partir de cero, en el gráfico de los números relativos, hay que dirigirse en sentido positivo en 3 + 5 unidades, en 8; desde este número se retrocede en 6 unidades y se llega al punto + 2; luego 3 + 5 — 6 = 2.

b) 6—9.

Desde el punto correspondiente a + 6 se retrocede en 9 unidades y, pasando por cero, se llega a — 3; luego 6—9 = —3.

c) — 2 — 5.

Partiendo de cero se dirige en sentido negativo en dos unidades y se continúa en el mismo sentido en 5 unidades y se llega al punto —7; luego —2—5 = —7.

Para facilitar la reducción de términos semejantes con factores literales, conviene tener presente que las letras, como factores de un término,

equivalen a la denominación de los números concretos, de manera que el cálculo de la reducción se hace con los coeficientes y se coloca la misma letra en el resultado.

d) 7a—2a—8a = —3a.

Reducir los términos semejantes en las expresiones siguientes:

1. ¿Qué significa +9, +a, —9, —a?
2. 6—6; a—a; 6—8; 7—10; 9—12; 20—25.
3. 7+15—18; 9+20+13—24.
4. 23—15—8; 32—18—14; 45—21—24.
5. 10—6—15; 20—8—16; 19—9—17.
6. —4—5; —12—8; —14—17; —18—22.
7. 9a+3a+8a. **8.** 10x+9x+12x.
9. x+5x; y+y; 5z—z.
10. 4x+5x—5x. **11.** 4x+6y+3x—6y.
12. 17a—b—12b **13.** 20m—9n+n.
14. 35x+26y—40x—25y.
15. 27a+36b—15c—26a—35b+14c.
16. 32x+30y—40z+18x—38y—z.
17. 45p—24q—16q+18r—28r—40p.
18. 8a+5b—7a+6b+9a—4b+7b—3a.
19. 24a—16b+3c—8b+7a+5c+23b+14a—
—7c—16a—2c.
20. 3m—7n+5m—7m+5n+3n—8p—5n+8p.
21. x—5y+8+7x—3y+5—7x+9y—13+y.
22. 27a—35b+49c—43a+69b+24a—43b—56c.
23. 63x—40y—52z—40x—20y+42z—x+15z.

24. $3\frac{1}{2}a-5b+7\frac{1}{3}c-2\frac{2}{3}a-4\frac{1}{2}b+\frac{1}{6}c-6\frac{1}{3}c+1\frac{1}{4}a+8b.$

25. $\frac{1}{4}a-\frac{1}{3}b+4\frac{1}{2}b-\frac{5}{6}c+3\frac{2}{3}a-1\frac{2}{3}c+\frac{1}{12}a+\frac{1}{5}b+9\frac{1}{2}c.$

26. $\frac{13}{4}a-b+\frac{7}{8}c+5\frac{1}{2}a+b-c-7\frac{1}{2}a+\frac{7}{2}b-\frac{7}{8}b.$

27. $\frac{3}{4}a-\frac{4}{5}b+0{,}25a+0{,}2b-a+b.$

28. $0{,}75x-0{,}6y+\frac{2}{5}y+1\frac{1}{2}a-b.$

29. $8\frac{1}{3}a-6{,}35b-5{,}7a-2\frac{1}{12}b+1\frac{1}{6}a+7\frac{1}{3}b.$

30. $a^2b+5a^2-9a^2-2a^2b.$

31. $12xy-4x^2y-3x^2y-8xy.$

32. $10x^2y^2-6xy^2-9x^2y^2-2xy^2.$

CAPITULO II.

Adición y sustracción.

A. ADICION.

6. Definición.—*Adición es la operación que tiene por objeto reunir dos o más números homogéneos en uno solo.* El resultado debe tener tantas unidades como el conjunto de los números que se suman.

Los números que se suman se llaman *sumandos* y el resultado es la *suma*.

La adición es asimilable a la operación material de reunir en un solo grupo varios grupos de objetos de la misma naturaleza. Esta operación única se puede efectuar por la agregación sucesiva de los grupos de objetos en cualquier orden o formando agrupaciones parciales y reuniendo después estos resultados. La verificación del mismo resultado en los dos procedimientos explica las dos propiedades siguientes de la adición:

1.ª *El orden de los sumandos no altera el valor de la suma*, es decir, la adición es una operación *conmutativa*.

2.ª Para sumar varias cantidades se pueden reunir en grupos y sumar en seguida las sumas parciales, es decir, la adición es una operación *asociativa*.

Es fácil verificar que si se aumenta o se disminuye un sumando, permaneciendo invariables los demás, la suma aumenta o disminuye en el mismo número de unidades. Esta dependencia de la suma respecto a los sumandos, se expresa diciendo que la suma es una *función* de cada uno de sus sumandos.

8. Sumar un monomio.—Sea el ejemplo $5 + (+2)$.

A partir de un punto O de una recta (fig. 3) se avanza en sentido positivo en 5 unidades de longitud hasta el punto A y desde este punto se

Fig. 3

continúa en el mismo sentido en dos unidades y se llega al punto B. El segmento OB representa la suma $5 + (+2)$.

El valor numérico del segmento OB se compone de $5+2$ unidades, igual a 7 unidades.

Si sustituimos 5 por *a* y 2 por *b*, tendremos el caso general:

$$a+(+b)$$

En la misma figura se tiene entonces que OA $= a$ y AB $= b$.

El segmento OB representa la suma:

$$a+(+b)=a+b; \text{ luego}$$

Para sumar un término positivo se suma su valor absoluto.

Sea ahora el caso $5+(-2)$.

A partir de O (fig. 3) se avanza en sentido positivo en 5 unidades, hasta el punto A y desde este punto se retrocede en 2 unidades hasta el punto C. El segmento AC tiene un valor negativo igual a -2, puesto que es recorrido desde A como origen a la izquierda. El segmento OC se compone de $5-2$ unidades. El hecho real de recorrer 7 unidades para llegar desde O al punto A y desde este punto al C, nos dice con claridad que se ha ejecutado una adición.

Sustituyendo 5 por *a* y 2 por *b*, tendremos el caso general:

$$a+(-b)=a-b; \text{ luego}$$

Para sumar un término negativo se resta su valor absoluto.

9. Sumar un polinomio.

Sea el ejemplo: $a+(b-c)$.

Para mayor claridad hagamos $a=4$, $b=3$, $c=2$, de manera que se trata de calcular:

$$4+(3-2).$$

Desde el origen O (fig. 4) se avanza en línea recta en sentido positivo en 4 unidades, hasta el punto A y en seguida, en el mismo sentido, se continúa en 3 unidades, hasta el punto B; desde este punto hay que retroceder en 2 unidades

Fig. 4

hasta el punto C. El segmento OC representa la suma $4+(3-2)$, que, según el camino recorrido, es igual a $4+3-2=5$.

Volviendo a las letras se obtiene, por sustitución:

$$a+(b-c)=a+b-c; \text{ luego}$$

Para sumar un polinomio se suman los términos positivos y se restan los negativos.

Como una consecuencia de este teorema, todo polinomio se puede considerar como una suma; en efecto, el polinomio.

$$a-b+c-d$$

se puede escribir

$$a+(-b)+(+c)+(-d).$$

Por esto, un polinomio recibe el nombre de *suma algebraica.*

B. SUSTRACCION.

10. Definición.—La sustracción es la operación inversa de la adición; se dan la suma de dos sumandos y uno de ellos y se trata de buscar el otro sumando.

De $8+7=15$, resulta $15-8=7$.

La suma conocida se llama *minuendo*, el sumando conocido, *sustraendo* y el sumando que se busca, o sea el resultado, se llama *diferencia.*

El cálculo se reduce, según esto, *a buscar el número que sumado con el sustraendo sea igual al minuendo*, o bien se trata de *quitar* (restar) *del minuendo las unidades del sustraendo.*

Es evidente que si se *aumenta* o *disminuye* el minuendo, permaneciendo invariable el sustraendo, la diferencia *aumenta* o *disminuye* en el mismo número de unidades; y que si se *aumenta* o *disminuye* el sustraendo, permaneciendo invariable el minuendo, la diferencia *disminuye* o *aumenta* en el mismo número de unidades. Ambos resultados expresan que la diferencia es una *función* de cada uno de sus términos.

11. Restar un monomio.

1) El sustraendo es un número positivo:

$$5-(+3)=?$$

Según la definición de sustracción, se trata de buscar un número que sumado con 3 sea igual a 5; tal número es 2, que se obtiene restando 3 de 5, puesto que $5-3=2$; luego

$$5-(+3)=5-3.$$

Al mismo resultado se llega valiéndose del gráfico de los números relativos. Del punto correspondiente a $+3$, situado 3 unidades a la derecha de cero, hay que avanzar 2 unidades para llegar al punto situado 5 unidades a la derecha de cero. Inversamente, partiendo del punto correspondiente a 5, hay que retroceder en 3 unidades para llegar al punto correspondiente a 2 unidades a la derecha de cero. De este modo se obtiene el procedimiento para restar un número positivo y el gráfico del cálculo.

En términos generales:

$$a-(+b)=?$$

Se trata de buscar un número que sumado con *b* resulte *a;* este número es *a—b*, porque *a—b+b=a;* luego

$$a-(+b)=a-b.$$

2) El sustraendo es un número negativo:

$$5-(-3).$$

Se debe buscar el número que sumado con —3 sea igual a 5; este número es 8, puesto que 8+(—3)=5 (N.° 8); pero 8 es igual a 5+3, luego el número que sumado con —3 es 5+3; por consiguiente:

$$5-(-3)=5+3.$$

Aprovechando el gráfico de los números relativos, el mismo ejercicio se explica así:

El punto correspondiente a —3, está situado 3 unidades a la izquierda de cero y para llegar al punto correspondiente a 5, hay que moverse en 8 unidades a la derecha; de donde resulta que la diferencia entre 5 y —3 es 8, lo que demuestra que:

$$5-(-3)=5+3.$$

En términos generales:

$$a-(-b)=?$$

El número que sumado con *—b* para obtener *a* es *a+b*, porque:

$$a+b-b=a;\text{ luego}$$
$$a-(-b)=a+b.$$

Los razonamientos anteriores explican el teorema:

Para restar un término positivo se resta su valor absoluto y para restar un término negativo se suma su valor absoluto.

Observación.—Si en la sustracción de un número positivo el sustraendo es igual al minuendo, la diferencia es igual a cero: 7—7=0.

Si el sustraendo es mayor que el minuendo, la diferencia es un número negativo.

$$8-12=-4.$$

De aquí que un número negativo *—p* se exprese por la fórmula:

$$-p=m-(m+p)$$

12. Restar una suma. $a-(b+c)=?$

Restando *b*, la diferencia sería *a—b;* pero como *b* tiene *c* unidades menos que *b+c*, la diferencia *a—b* tiene *c* unidades más que la pedida; es necesario entonces restar estas *c* unidades y resulta a—b—c; luego

Para restar una suma se restan sucesivamente los sumandos.

Recíprocamente, *en vez de restar sucesivamente varios términos se puede restar su suma.*

La proposición es evidente, porque los dos miembros de una igualdad se pueden cambiar entre sí:

$$a-(b+c)=a-b-c$$

es lo mismo que:

$$a-b-c=a-(b+c).$$

13. Restar una diferencia. $a-(b-c)=?$

Restando b, la diferencia sería $a-b$; pero b tiene c unidades más que $b-c$; la diferencia $a-b$ tiene entonces c unidades menos que la pedida (N.° 10). Para tener la diferencia pedida hay que agregar estas c unidades y resulta $a-b+c$; luego

Para restar una diferencia se resta el minuendo y se suma el sustraendo.

14. Restar un polinomio. $a-(b+c-d)=?$

Restando $b+c$, según N.° 12, la diferencia sería $a-b-c$; pero esta diferencia tiene d unidades menos que la pedida (¿por qué?); agregando estas d unidades, resulta $a-b-c+d$; luego

Para restar un polinomio se restan los términos positivos y se suman los negativos.

Recíprocamente, *para indicar un polinomio como sustraendo se encierra el polinomio entre paréntesis, cambiando los signos de los términos.*

Observación.—La aplicación de los teoremas de este capítulo hacen desaparecer o resuelven los paréntesis.

En el cálculo de la adición y sustracción de polinomios se pueden colocar los términos del sustraendo debajo de los términos semejantes del minuendo, y entonces el cálculo parcial se reduce a sumar o restar un monomio.

Ejercicios.

Sumar los polinomios siguientes:

1. $5a-3b+c$
$4a-5b-c.$

2. $15x+12y-8z.$
$-9x-20y-7z.$

3. $a^2+4a-6b-7$
$7a^2-9a-5b-3$
$-4a^2+7a-10b-2.$

4. $x^3+4x^2y-6xy^2$
$8x^3-9x^2y-3xy^2$
$-3x^3+6x^2y+8xy^2.$

Restar el segundo polinomio del primero (5 a 8):

5. $15a+3b-5c$
$10a+b-3c.$

6. $9ab+4a-8$
$6ab-3a-9.$

7. $23x^2-7xy+2y^2$
$20x^2-4xy-3y^2.$

8. $9m+2n+5$
$2m-3n+9.$

9. Dados los polinomios

$7a^2-6ab+b^2-3ac+3bc-c^2$
$8a^2+9ab-4b^2-5ac+2bc-3c^2$
$9a^2+13ab-9b^2-7ac-bc+2c^2$
$5a^2-9ab+5b^2-2ac+7bc-7c^2,$

restar la suma de los dos últimos polinomios de la suma de los dos primeros.

10. Dados los polinomios:

$12x^4-15x^3y+13x^2y^2-17xy^3+16y^4$
$x^4-9x^3y+8x^2y^2+6xy^3-9y^4$
$3x^4+10x^3y-15x^2y^2-3xy^3+12y^4$
$7x^4+20x^3y-22x^2y^2+14xy^3+13y^4,$

restar del primer polinomio la suma de los tres siguientes.

Resolver los paréntesis y reducir los términos semejantes en los ejercicios siguientes:

11. $246+(172+54)$. **12.** $438+(327-38)$.
13. $8a+(3b-6a)$. **14.** $(7x-2y)+5y$.
15. $7a+(5b+2a)+(a-7b)$.
16. $(\frac{3}{4}x+\frac{2}{3}y)+(\frac{5}{8}x-\frac{5}{6}y)$.
17. $(4{,}7a+5{,}3b)+(1{,}8a-0{,}8b)$.
18. $364-(64-215)$. **19.** $745-(163+245)$.
20. $9x-(6x+7)$. **21.** $12m-(5+9m)$.
22. $(x+5y)-(x+4y)$. **23.** $(3p-7q)-(2p-8q)$.
24. $(6a+3b)-(5a+4b)$. **25.** $(15c-16d)-(20c+d)$.
26. $(8{,}3x+2{,}5y)-(x-0{,}7y)$ **27.** $4{,}6a-b-(a+0{,}5b)$.
28. $7\frac{5}{12}m-4\frac{5}{9}n-(\frac{7}{8}m+\frac{5}{6}n)$ **29.** $6x-y-(\frac{3}{4}x-\frac{6}{7}y)$
30. $28a-(35a+23b)+45b-(21b-a)+6a$.
31. $31x-(42y-52z)+9y-(30x+51z)+8z-$
$-(11z-33y)$.
32. $25-(5a-8)+(6a+7)-(a+20)$.
33. $x^2+y^2-(3x^2-2y^2)+(y^2-x^2)-(4y^2-6x^2)$.
34. $6a-(7a+3b-5c)+(a+4b-3c)$.
35. $35x-(40y-59z+41x)-(60z-7x-41y)$.
36. $3a+(a+7b-4c)-(3a+5b-3c)-(b-c)$.
37. $8x-(15y+16z-12x)-(13x+20y)-(x+y+z)$.
38. $(6x^2+3x-5)+(3x^2-7x+2)-(9x^2-3x-4)$.
39. $74-29t-(50-43s-30t+42r)-(7t-$
$-43r+44s+24)$.
40. $\{8-(10a+3b)\}-[9-\{(14a-7b)-(3a-$
$-9b-1)\}]$.

Para resolver paréntesis múltiples se puede seguir uno de los procedimientos siguientes:

1.° Se resuelven primero los paréntesis interiores y se tiene sucesivamente:

$$\{8-10a-3b\}-[9-\{14a-7b-3a+9b+1\}]$$
$$8-10a-3b-[9-14a+7b+3a-9b-1]$$
$$8-10a-3b-9+14a-7b-3a+9b+1=a-b.$$

2.° Se resuelven primero los paréntesis exteriores y se tiene sucesivamente:

$$8-(10a+3b)-9+\{(14a-7b)-(3a-9b-1)\}$$
$$8-10a-3b-9+(14a-7b)-(3a-9b-1)$$
$$8-10a-3b-9+14a-7b-3a+9b+1=a-b.$$

El segundo procedimiento permite combinar las operaciones y anotar inmediatamente la última línea.

41. $(7a-2b)-[(3a-c)-(2b-3c)]$.
42. $2-x-[7x-\{9x-(3+6x)\}]$.
43. $2x-[(17-9x)+(x+1)]$.
44. $(2a-b)-[5b-(a+2b)+(a-4b)]$.
45. $(x-2y)-[\{3x-(2y-z)\}-\{4x-(3y-$
$-2z)\}]$.
46. $44x+\{48y-(6z+3y-7x)+4z\}-\{48x-$
$-8y+2z-(4x+y)\}$.
47. $(5x-3y-7z)-[(8x-9y-3z)-\{(9y-3x-$
$-7z)-(8y-7x-2z)\}]$.
48. $7\frac{5}{6}a+\{(2\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}b)-(7\frac{1}{2}a+3x)\}+(1{,}5b-$
$-0{,}25x)$.
49. $(2\frac{1}{2}x-3\frac{1}{4}y)-\{(1\frac{5}{6}x-2y)-(1\frac{3}{4}y-2\frac{1}{2}z)\}-$
$-(\frac{2}{3}x-2{,}5z)$.

Encerrar en un sustraendo todos los términos, menos el primero de los siguientes polinomios:

50. a—b—c.	**51.** a—b+c.
52. a—x+y—z.	**53.** a—x—y+z.
54. x+y—3—z.	**55.** x+2—y+z.
56. m+p+5—n.	**57.** a+4+b—c.

C. ECUACIONES.

Aplicación de la adición y sustracción a la resolución de ecuaciones.

15. Problema.—*¿Qué número sumado con 7 es igual a* 15?

Si designamos por x el número desconocido y remplazamos las condiciones del problema por anotaciones algebraicas, resulta la igualdad:

$$x+7=15.$$

En esta relación se conoce la suma de dos sumandos y uno de ellos, y se trata de buscar el otro sumando. Según la definición de la sustracción, el sumando x será igual a la suma 15 menos el sumando 7, luego

$$x=15-7=8.$$

Si en la igualdad:

$$x+7=15,$$

se sustituye x por su valor y se ejecuta la suma, se obtiene la igualdad:

$$15=15.$$

Esta igualdad es una *identidad.*

En general, *identidad* es una igualdad evidente o que se hace evidente mediante operaciones efectuadas con los símbolos que entran en los dos miembros. Toda identidad se puede reducir a la forma $a=a$, después de transformaciones legítimas.

Una igualdad, como $x+7=15$, que se verifica para un valor determinado de la cantidad desconocida que figura en ella, se llama *ecuación.* La cantidad desconocida es la *incógnita.* El valor de la incógnita que satisface a la ecuación, es decir, que verifica la igualdad, convirtiéndola en identidad, se llama *solución* o *raíz* de la ecuación.

Resolver una ecuación es calcular el valor de la incógnita.

En este párrafo se trata sólo de ecuaciones cuyos dos miembros son sumas algebraicas o contengan paréntesis que se resuelvan por adición o sustracción.

La resolución de esta clase de ecuaciones se funda en el axioma siguiente:

Si a cantidades iguales se suman o se les restan cantidades iguales, se obtienen resultados iguales.

La aplicación de este principio permite transformar una ecuación comprendida en este párrafo, hasta reducirla a la *forma normal:*

$$ax=b.$$

El valor de x resulta dividiendo los dos miembros de la ecuacion por el coeficiente a y se obtiene:

$$x=\frac{b}{a}.$$

Para obtener la forma normal de una ecuación *se reúnen en un miembro los términos con la incógnita y en el otro los términos conocidos y en seguida se hacen las reducciones.*

Cuando se tiene cierta práctica conviene hacer al mismo tiempo las reducciones.

En la *transposición* de los términos de una ecuación hay que tener presente que un término que está sumando en un miembro, en el otro debe restar y viceversa.

Una ecuación es *numérica* cuando todos sus términos, menos el que contiene la incógnita, son números ordinarios, y *literal* cuando sus términos son letras.

Una ecuación de la forma:

$$ax = b$$

es de *primer grado*, si el exponente de la incógnita es uno.

Resolver las ecuaciones siguientes:

1. $x+9=16$	**2.** $x-6=4.$
3. $x+10=21.$	**4.** $x-8=12.$
5. $5+x=8.$	**6.** $24+x=40.$
7. $x-6=15.$	**8.** $x-9=5.$
9. $7=x+1.$	**10.** $37=9+x.$
11. $40-x=29.$	**12.** $45=52-x.$
13. $1-x=1.$	**14.** $12-x=4.$
15. $7x-15-6x=31.$	**16.** $2x+6-x=23.$
17. $6x=5x+8.$	**18.** $7x=8x+1.$
19. $x-b=a.$	**20.** $x+b=a.$
21. $m=x-n.$	**22.** $q=p-x.$
23. $2x-3a+4x=5x-2a$	**24.** $6c-4x-d=3x+5c-6x.$

25. $5x=35.$	**26.** $8x=32.$
27. $3x-17=13.$	**28.** $7x-9=47.$
29. $3x-4+2x=21.$	**30.** $4x-16-7x=20.$
31. $7x-9=3x+31.$	**32.** $15x-73=6x+35.$
33. $23x-52-17x=80-6x-12.$	
34. $45-17x-15=32x-40-54x.$	
35. $24-18x+6=12x-18-14x.$	
36. $ax=a.$	**37.** $bx=1.$
38. $ax=ab.$	**39.** $mx+n=p.$

En las ecuaciones siguientes hay que resolver primeramente los paréntesis.

40. $8x-(3x+7)=18$ **41.** $29-(5x-6)=5.$

42. $7x=59-(12x+21).$ **43.** $47-(6x+13+2x)=13x.$

44. $19-(30-28x)-(21+17x)=56.$

45. $9x-12-(2x+3)-(3x-4)=9.$

46. $6x-(11x-10)=87-(21+13x).$

47. $51-\{14x+(3x-2)\}=12x-\{(14x+3)-6\}$

48. $3x+[(17-9x)-(16x-10)]=30-23x.$

49. $a-(x+b)=0.$ **50.** $8a-(2a+x)=5a$

51. $2a-(x-b)=x-(b-2a).$

Problemas.

En la resolución de un problema algebraico conviene observar la siguiente disposición:

1.° Se indica la incógnita, fijándose en la pregunta del problema.

2.° Se plantea la ecuación, fijándose en el enunciado del problema.

Plantear una ecuación es anotar con números y signos de operación las condiciones del problema. Los números y los signos de operación, es decir, la notación algebraica, expresan, en la ecuación, las relaciones entre los datos y la incógnita del problema.

3.° Se resuelve la ecuación.

Aunque estos puntos son los esenciales en la resolución de un problema algebraico, sigue todavía la *discusión* de la solución. En este punto, hay que hacer ver si el resultado corresponde al problema y examinar los distintos casos que se pueden presentar. Con este objeto se hacen notar las variaciones de la solución con relación a distintos valores de los datos.

Ejemplo.—*Si el precio de un metro de género se aumenta en* E° 2,75, *se obtiene el mismo valor que restando el precio de* E° 27,75. *¿Cuánto vale el metro de género?*

1.° Sea x el precio del metro de género.

2.° Según el enunciado del problema, resulta la ecuación

$$x+2,75=27,75-x.$$

3.° Sumando x y restando 2,75, se tiene:

$$2x=25.$$

Dividiendo los dos miembros por 2, se obtiene:

$$x=12,50.$$

Prueba: E° 12,50+E° 2,75=E° 15,25
E° 27,75—E° 12,50=E° 15,25.

Resolver los problemas siguientes:

1. ¿Qué número sumado con 283 es igual a 700?

2. ¿Qué número debe restarse de 654 para obtener 240?

3. ¿Qué número hay que sumar con 0,684 para obtener uno?

4. ¿De qué número hay que restar 1,745 para obtener 3,25?

5. ¿Qué número sumado con p es igual a q?

6. ¿De qué número hay que restar a+1 para obtener 2?

7. Si a cierto número se agrega 30, resulta el triple de ese número. ¿Cuál es el número?

8. Si se resta 26 del doble de un número más 2, resulta el mismo número. ¿Cuál es el número?

9. Si tres veces cierto número se suma con 72, resulta 8 veces dicho número menos 18. ¿Cuál es el número?

10. Si de 420 se resta cierto número aumentado en 36, resulta 300. ¿Cuál es el número?

11. El mayor de los ángulos de un triángulo tiene 14° más que el ángulo del medio y éste tiene 16° más que el ángulo menor. ¿Cuántos grados tiene cada ángulo?

12. En el segundo año de humanidades de un liceo hay el doble número de alumnos del que hay en el tercer año, y en el primero, el doble número de alumnos de segundo año.

¿Cuántos alumnos hay en cada curso, si en los tres hay 154 alumnos?

13. La suma de tres números pares consecutivos es 258. ¿Cuáles son los números?

14. La suma de cuatro números impares consecutivos es 296. ¿Cuáles son los números?

15. Un hombre tiene 30 años más que su hijo y 31 menos que su padre. La suma de las edades de estas tres personas es 100 años. ¿Cuál es la edad de cada una?

16. Dos asociados se reparten el beneficio de un negocio, de modo que la parte del primero, que equivale a 3 veces la del segundo, exceda en E° 10 800 a la del segundo. ¿Cuánto recibe cada uno?

17. Repartir E° 180 entre tres personas, de modo que la primera reciba E° 20 más que la segunda y ésta E° 20 más que la tercera. ¿Cuánto recibe cada persona?

18. ¿Cuáles son los números cuya suma es 218 y su diferencia 30?

19. La suma de tres números es 100. El primero tiene 9 y el segundo 7 unidades más que el tercero. ¿Cuáles son los números?

20. Dos personas, A y B, que viven a una distancia de 12 leguas una de la otra, emprenden viaje al mismo tiempo y en la misma dirección (del pueblo de A hacia el de B). A recorre 10 y B 7 leguas al día. ¿En cuántos días alcanzará A a B?

21. Dos trenes parten para encontrarse, desde las estaciones A y B, respectivamente, cuya distancia es 553 km. La velocidad del que parte de A es 42 km y la del que parte de B es 37 km por hora. ¿A qué distancia de los puntos de partida se encuentran?

22. Un prisionero huyó de A a B a las 5 A. M. de un día, con la velocidad de 6 km por hora. A las 11 A. M. se envía un ciclista en su persecución, quien recorre un kilómetro en 4 minutos. ¿A qué hora lo alcanza?

23. Una persona tiene E° 168 en billetes de E° 5 y de E° 1. ¿Cuántos billetes de cada clase tiene, si el número de a E° 5 es cuatro veces el de a E° 1?

CAPITULO III

Multiplicación.

16. Definición.—La suma $4+4+4$ se puede escribir del modo siguiente: $4 \cdot 3$ (4 multiplicado por 3). La operación que resulta es la *multiplicación;* luego *multiplicar un número por otro es repetir el primero como sumando tantas veces como unidades tenga el segundo.*

El sumando que se repite se llama *multiplicando* y el número que indica las veces que se repite el multiplicando se llama *multiplicador*. El resultado se llama *producto*. El producto es entonces una suma de sumandos iguales.

El multiplicando y el multiplicador tienen el nombre común de *factores* del producto.

Un producto, por ejemplo ab, puede representar además una superficie. En efecto, el rectángulo ABCD (fig. 5), cuyos lados contiguos son a y b, tiene como área ab, puesto que la geometría nos enseña que el área de un **rectángulo es igual al producto de sus lados contiguos.**

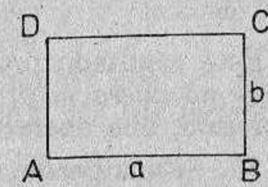


Fig. 5

Si en el producto $12 . 3 = 36$, se hace mayor uno de los factores, por ejemplo, 2 veces al factor 12, resulta $24 . 3 = 72$. El producto resultó también multiplicado por 2. Si se divide por 2 al mismo factor 12, resulta $6 . 3 = 18$. El producto resultó también dividido por 2. Lo que establece que *el producto es una función de cada uno de sus factores.*

17. Propiedad de los factores.—Aplicando en el producto $4 . 3$ el desarrollo que indica la definición de la multiplicación, descomponiendo en seguida cada sumando en sus unidades y formando la suma de las columnas, se obtiene el cuadro siguiente:

$$\begin{array}{rl} 4 . 3 = 4+4+4 = & 1+1+1+1 \\ & 1+1+1+1 \\ & 1+1+1+1 \\ \hline & 3+3+3+3 = 3 . 4. \end{array}$$

Este resultado prueba que *el orden de los factores no altera el producto.* La multiplicación es, por esto, una operación *conmutativa.*

18. Si una persona debe E° 65 se dice que tiene —E° 65. Tres veces su deuda será (—E° 65) · 3, es decir, —E° 195.

Del mismo modo, $(-4) . 3$ significa que -4 se repite 3 veces como sumando, es decir,

$$(-4) . 3 = (-4) + (-4) + (-4) = -4 -4 -4 = -12.$$

Si $(-4) . 3 = -12$, el producto de $3 . (-4)$ debe ser también -12, ya que el orden de los factores no altera el producto; luego

Si uno de los factores es negativo, el producto es también negativo.

Calcular:

1. $(-8) . 6$.	**2.** $7 . (-9)$.
3. $(-a) . b$.	**4.** $c . (-d)$.

19. Multiplicar un producto por un número.

$$(4 . 6) . 7 = (4 . 7) . 6 = 28 . 6 = 168$$
$$(4 . 6) . 7 = (6 . 7) . 4 = 42 . 4 = 168.$$

De donde se deduce que en lugar de multiplicar un producto por un número se puede multiplicar uno de los factores y este resultado por el otro factor o por los otros factores, cuando el producto se componga de más de dos factores; luego

Para multiplicar un producto por un número, se multiplica uno de los factores y el resultado se multiplica por los demás factores.

Recíprocamente, *para multiplicar por un producto se multiplica sucesivamente por sus factores.*

1. $(48 . 9) . 5$.	**2.** $(36 . 7) . 25$.
3. $15x . 6$.	**4.** $7a . 8$.
5. $18 . (5 . 7)$.	**6.** $19 . 30$.

20. Multiplicar potencias de igual base.

Un producto de factores iguales, como $5 . 5 . 5 . 5$, se llama *potencia;* se escribe 5^4 y se lee: 5 elevado a 4.

El factor que se repite se llama *base* y el número que indica las veces que la base se repite se llama *exponente*. En 5^4 la base es 5 y el exponente es 4.

Sea $a^4 \cdot a^3 = ?$

Según la definición de potencia, resulta:

$a^4 \cdot a^3 = aaaaaaa = a^7$; luego

Para multiplicar potencias de igual base se eleva la base a la suma de los exponentes.

1. ¿En qué forma se puede escribir: a) $3 \cdot 3 \cdot 3$ $3 \cdot 3$; b) $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$?

2. ¿Qué significa 7^3, a^5, b^4, x^n? Escribir el desarrollo en cada caso.

3. $a^4 \cdot a^2$.	**4.** $x^5 \cdot x^4$.
5. $a^3 \cdot a$.	**6.** $a^{n+1} \cdot a^4$.

21. Multiplicar monomios.

Ejemplo: $4a^2b \cdot 3ab^3 = ?$

Aplicando la propiedad de los factores y el teorema precedente, resulta sucesivamente:

$4a^2b \cdot 3ab^3 = 4 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot a \cdot b \cdot b^3 = 12a^3b^4$; luego

Para multiplicar monomios se multiplican los coeficientes y se aplica para los factores literales el teorema para multiplicar potencias de igual base.

Observación.—En el cálculo del producto de monomios pueden agruparse los factores y formar con los productos parciales el producto definitivo.

La multiplicación es, según esto, una operación **asociativa.**

1. $7a \cdot 6b$.	2. $14x^2 \cdot 5xy$.
3. $4a^4b^2 \cdot 8a^3b^2$.	4. $10x^5y^3z \cdot 3x^2y^4z^2$.

22. Multiplicar un polinomio por un monomio.

El área del rectángulo A B C D (fig. 6), cuya base es $a+b+c$ y su altura h, es $(a+b+c)\,h$. El mismo rectángulo se compone de los rectángulos $ah+bh+ch$; de modo que

rec. A B C D $=(a+b+c) \cdot h$
rect. A B C D $=ah+bh+ch$.

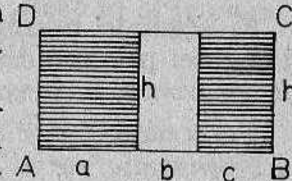


Fig. 6

Como los primeros miembros de estas igualdades son iguales, los segundos son también iguales entre sí, es decir,

$$(a+b+c)h = ah+bh+ch.$$

El mismo resultado se obtiene aplicando la definición de la multiplicación y reduciendo los términos semejantes, como se nota en el desarrollo siguiente, haciendo $h=3$:

$$\begin{aligned}(a+b+c)3 &= (a+b+c)+(a+b+c)+(a+b+c)\\ &= a+b+c+a+b+c+a+b+c \text{ (N.° 9)}\\ &= 3a+3b+3c;\text{ luego}\end{aligned}$$

Para multiplicar un polinomio por un monomio se multiplica cada término del polinomio por el monomio.

1. $(x+y)4$.
2. $(a-b)5$.
3. $(2a-3b+5c)7$.
4. $(7x-6y-4z)b$.

23. Convertir un polinomio en un producto o sacar factor común.

Cambiando el orden de los dos miembros de la igualdad del teorema anterior, resulta:

$$3a+3b+3c=3(a+b+c).$$

El segundo miembro de esta igualdad se obtiene del primero dividiendo cada término por el *factor común* **3**; luego

Para sacar factor común se divide cada término del polinomio por el factor común, escribiendo este factor común fuera de un paréntesis y entre paréntesis el polinomio que resulta de la división.

1. $6a+6b$.
2. $5x-5y$.
3. $9a+9$.
4. $12m-6n$.
5. $8p+12q-20r$.
6. $18a+2ab-30ac$.

24. Multiplicar un polinomio por otro.

Ejemplo: $(a-b)\ (c-d)$.

Desarrollo por representación gráfica:

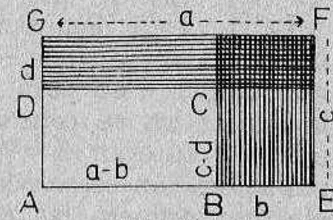


Fig. 7

En el rectángulo AEFG, el lado $AE=a$, $EF=c$, $BE=b$, $DG=d$, de modo que el rectángulo A B C D tiene como lados $a-b$ y $c-d$.

Según la figura, rect. $(AC)=(AF)-(DF)-(BF)+(CF)$, puesto que este rectángulo (CF) ha sido restado dos veces.

Sustituyendo estos rectángulos por sus áreas, resulta:

$$(a-b)\ (c-d)=ac-ad-bc+bd.$$

Desarrollo algebraico: Considerando el segundo polinomio como monomio y aplicando el teorema del número **22**, se tiene:

$$\begin{aligned}(a-b)\ (c-d) &= a(c-d)-b(c-d)\\ &= ac-ad-(bc-bd)\\ &= ac-ad-bc+bd \quad (\text{N.}^{\circ}\ 13);\ \text{luego}\end{aligned}$$

Para multiplicar un polinomio por otro, se multiplica cada término de un polinomio por cada término del otro.

Regla de los signos de un producto.—Como una consecuencia del producto de un polinomio por otro, resultan las siguientes reglas sobre el signo del producto de dos términos:

1.ª *El producto de dos términos de distinto signo es negativo.*

2.ª *El producto de dos términos de igual signo es positivo.*

Demostración directa de estas reglas:

La 1.ª está demostrada en el número **18**; lo mismo $(+a) \cdot (+b) = +ab$; $(-a) \cdot (-b)$ debe *definirse* como $+ab$ para que las leyes formales de la aritmética se conserven. En efecto, si en el ejemplo anterior $a=9$, $b=4$, $c=8$ y $d=5$, la multiplicación se convierte en $(9-4) \cdot (8-5)$. Al efectuar primero las restas y después la multiplicación, resulta $5 \cdot 3 = 15$. Si multiplicamos como polinomios, los tres primeros productos son 72, —45, —32; la suma es —5. Para que el resultado sea 15, $(-4) \cdot (-5)$ debe ser $+20$.

1. $(+2a) \cdot (-3b)$.	**2.** $(-5p) \cdot (+4q)$.
3. $(-7x) \cdot (-2y)$.	**4.** $(-6ab) \cdot (-5a)$.
5. $(a+4)\ (b+3)$.	**6.** $(2x-5)\ (x+6)$.
7. $(3a-2b)\ (7a-3b)$.	**8.** $(9x-10y)\ (4x-5y)$.

25. Descomponer un trinomio ordenado de segundo grado en un producto de dos factores binomiales de primer grado.

Consideremos los productos:

1) $(x-4)\ (x-5) = x^2-9x+20$.
2) $(x+8)\ (x-3) = x^2+5x-24$.

Permutando los miembros de las dos igualdades se tiene la tesis del teorema.

Para dar una regla general del desarrollo de la cuestión, hay que fijarse en el tercer término, el cual puede ser positivo o negativo.

En el primer ejemplo este término es positivo (20); hay que descomponerlo en dos factores, cuya *suma sea* —9; estos factores son —4 y —5. El ejercicio se transforma como sigue:

$$\begin{aligned} x^2-9x+20 &= x^2-4x-5x+20 \\ &= x(x-4)-5(x-4) \qquad \text{(N.° 23)} \\ &= (x-4)\ (x-5). \qquad \text{(N.° 23).} \end{aligned}$$

En el segundo ejemplo el tercer término es negativo (—24); se descompone este término en dos factores cuya suma sea 5; $8+(-3) = +5$. Entonces se puede escribir:

$$\begin{aligned} x^2+5x-24 &= x^2+8x-3x-24 \\ &= x(x+8)-3(x+8) \qquad \text{(N.° 23)} \\ &= (x+8)\ (x-3). \qquad \text{(N.° 23)} \end{aligned}$$

Expresar en producto:

1. $x^2+13x+42$.	**2.** $x^2-15x+54$.
3. $x^2-3x-70$.	**4.** $x^2+8x-48$.

26. Cuadrado de un binomio.

1) $(a+b)^2 = ?$

Desarrollo por representación gráfica. El cuadrado ABCD (fig. 8) se compone de la suma de los cuadrados (AF) y (FC) más los rectángulos (BF) y (DF), cuyos lados se anotan en la figura.

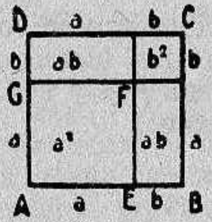


Fig. 8

Según esto,

$$ABCD = (AF) + (BF) + (DF) + (CF).$$

Sustituyendo por las áreas, resulta:

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Desarrollo algebraico:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= (a+b)\ (a+b) && \text{(N.° 20)} \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 && \text{(N.° 24).} \\ &= a^2 + 2ab + b^2. \end{aligned}$$

2) $(a-b)^2 = ?$

Desarrollo por representación gráfica. El cuadrado ABCD (fig. 9) se deriva del cuadrado (EG) menos los rectángulos (AF) y (FC), más el cuadrado (FD), cuyos lados están anotados en la figura. Según esto,

$$ABCD = (EG) - (AF) - (FC) + (FD).$$

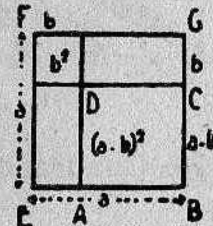


Fig. 9

Sustituyendo por las áreas, resulta:

$$(a-b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Desarrollo algebraico:

$$\begin{aligned} (a-b)^2 &= (a-b)\ (a-b) && \text{(N.° 20)} \\ &= a^2 - ab - ab + b^2 && \text{(N.° 24)} \\ &= a^2 - 2ab + b^2. \end{aligned}$$

Resumen:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;\ \text{luego}$$

El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término, más, menos el doble del producto de los términos, más el cuadrado del segundo término.

1. $(a+6)^2$ 2. $(a-7)^2$. 3. $(3x+y)^2$.
4. $(8x-y)^2$. 5. $(4a+5b)^2$. 6. $(10x-12y)^2$.

27. Cubo de un binomio.

$$(a+b)^3 = (a^2+2ab+b^2)\ (a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = (a^2-2ab+b^2)\ (a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;\ \text{luego}$$

El cubo de un binomio es igual al cubo del primer término, más, menos el triple del cuadrado del primer término por el segundo, más el triple del primer término por el cuadrado del segundo y más, menos el cubo del segundo término.

1. $(a+4)^3$. 2. $(a-5)^3$. 3. $(2x+3y)^3$.
4. $(4x-y)^3$.

28. Producto de la suma de dos términos por su diferencia.

$$(a+b)(a-b)=?$$

Desarrollo por representación gráfica. El rectángulo ABCD (fig. 10) es igual al cuadrado EFGD menos el rectángulo (HJ), menos el cuadrado (AH) más el rectángulo (BG). Los lados de estos rectángulos están anotados en la figura. Se tiene entonces:

$$ABCD=(EG)-(HJ)-(AH)+(BG).$$

Sustituyendo por las áreas, resulta:

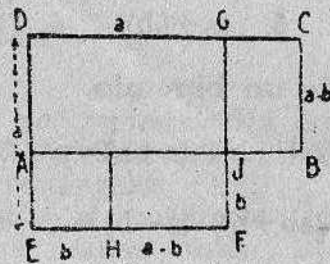


Fig. 10 (1)

$$(a+b)(a-b)=a^2-(a-b)b-b^2+(a-b)b=a^2-b^2.$$

Desarrollo algebraico:

$$(a+b)\ (a-b)=a^2-ab+ab-b^2 \quad (\text{N.}^\circ\ 24)$$
$$=a^2-b^2;\ \text{luego}$$

(1) GC = b.

El producto de la suma de dos términos por su diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados de estos términos.

1. $(a+4)\ (a-4)$.
2. $(a+1)\ (a-1)$.
3. $(5x+3y)\ (5x-3y)$.
4. $(10m+9)\ (10m-9)$.

29. Diferencia de dos cuadrados.

Cambiando el orden de los miembros de la igualdad de la tesis del teorema anterior, resulta el teorema recíproco:

$$a^2-b^2=(a+b)\ (a-b);\ \text{luego}$$

La diferencia de dos cuadrados es igual al producto de la suma de las bases por su diferencia.

1. m^2-n^2.
2. x^2-25.
3. $16x^2-9$.
4. $36a^2-49b^2$.

Ejercicios.

1. $(24 . 7) . 5$.
2. $(16 . 9) . 25$.
3. $(5 . 43) . 20$.
4. $(25 . 38) . 4$.
5. $14a . 8$.
6. $15x . 6$.
7. $12a . \frac{1}{2}$.
8. $24x . \frac{1}{3}$.
9. $15c . \frac{3}{5}$.
10. $18b . \frac{5}{6}$.
11. $2{,}5x . 12$.
12. $3{,}75y . 4$.
13. $(-18a) . 20$.
14. $7x . (-25)$.
15. $25^2=20 . 30+25=625$.
16. $35^2,\ 45^2,\ 55^2,\ 65^2,\ 75^2,\ 85^2,\ 95^2,\ 105^2$.

17. $a^5 \cdot a^3$. **18.** $a^3 \cdot a^6$ **19.** $a^8 \cdot a^2$.

20. $x^9 \cdot x^3$. **21.** $x^{13} \cdot x^{10}$. **22.** $x^{17} \cdot x^{15}$.

23. $a^5 \cdot a$. **24.** $b \cdot b^8$. **25.** $c^n \cdot c$.

26. $a^{m+2} \cdot a$. **27.** $a^{n-1} \cdot a$. **28.** $a^{n-2} \cdot a$.

29. $x^{n+1} \cdot x^3$. **30.** $y^{2p-1} \cdot y^6$. **31.** $z^{2n+2} \cdot z^{n-2}$.

32. $a^3b^4 \cdot a^2b^5$. **33.** $x^7y^4z^6 \cdot x^5y^3z^8$.

---

34. $2a \cdot 5b$. **35.** $7x \cdot 3y$. **36.** $4\frac{1}{2} \cdot 6b$.

37. $\frac{2}{3}c \cdot 27d$. **38.** $9x \cdot 5x$. **39.** $6\frac{2}{3}y^2 \cdot 12y$.

40. $7ac \cdot 2ac^2$ **41.** $15x^2y \cdot 8x^3y^4$ **42.** $14a^3b \cdot 5a^2b^3 \cdot ab$.

43. $15x^3y^2z \cdot 4xy^2z \cdot 3x^2yz^3$.

44. $3ab \cdot (-5a^2b^2)$. **45.** $(-4x^3y^7) \cdot 17xy^4$.

46. $(-18pq^3) \cdot (-3p^2q)$ **47.** $(-19m^3n) \cdot (-6m^2n^3)$

48. $(-9x) \cdot (-4y) \cdot (-5z)$ **49.** $(-12a) \cdot 5ab \cdot (-7ab^4)$.

50. $(a+b)7$. **51.** $(x-y)5$. **52.** $(m+1)3$.

53. $(n-1)8$. **54.** $(a-b+c)9$. **55.** $(x+y-1)4$.

56. $6(2x+3y-4z)$. **57.** $7(8a-3b+5c)$.

58. $2a(4a+2a^2b+3a^2c)$.

59. $3x(5x-7x^2y-4x^2y)$.

60. $(a^2-2ab+b^2) \cdot (-3ab)$.

61. $(3x^2-5xy^2-4x^2y) \cdot (-6xy^2)$.

62. $99 \cdot 18 = (100-1)18 = 1800-18 = 1782$.

63. $198 \cdot 15$ $999 \cdot 26$ $698 \cdot 8$.

64. $899 \cdot 7$ $9999 \cdot 47$ $995 \cdot 52$.

65. $5(2x-3y+2z)+3(5y-3x-2z)$.

66. $8(3a-5y-2z)-6(4a-6y+3z)$.

67. $2(5a+8b)-3(3a-5b)+4(a-7b)$.

68. $10-6(x-5y)+2(3x-5+14y)$.

69. $9[8(2a-3b)-(12a-23b)]$.

70. $12a[a-3(2a-b)-4(3a+2b)-(-17)]$.

Sacar factor común:

71. $4a-4b$. **72.** $9x-9y$. **73.** $7x+7$.

74. $5x-5$. **75.** $16a-12$. **76.** $15b-10$.

77. $6x-12y+18$. **78.** $8p+12q-4$.

79. $15a+20b-30$.

80. $14c-21d+35$. **81.** $ax+bx$. **82.** $am-an$.

83. $ab-a$. **84.** $px+p$. **85.** $xx-x$.

86. $aa+a$. **87.** y^2+y. **88.** b^2-b.

89. $5a^2-ab+a$. **90.** $3ab+6ac-9ad$.

91. $20a^2b+12ab^2-4ab$.

92. $10x^2y-15xy^2+25xy$.

93. $a(x-y)+b(x-y)$.

94. $3(2a+b)-c(2a+b)$

95. $(a+b)\ (a-b) + (a+b)\ (a+b)$

96. $(5a-3)\ (x+y)-3a(x+y)$.

97. $ap+aq+bm+bn$. **98.** $xy-x+3z-6$.

99. $x^2+xy+xz+yz$. **100.** $15+5a+3b+ab$.

101. $ab+a-b-1$. **102.** $x^2+9x+8x+72$

Multiplicar:

103. $(a+2)\ (b+3)$. **104.** $(x+7)\ (y+5)$.

105. $(m+4)\ (n-1)$. **106.** $(p-4)\ (q+9)$.

107. $(8-x)\ (x-5)$. **108.** $(3x-2y)\ (5x+3y)$.

109. $(6x-10)\ (3x-5)$. **110.** $(9y+6)\ (10x-7)$.

111. $17 \cdot 14 = (10+7)\ (10+4) = 100+70+40+28$
$= (17+4) \cdot 10 + 4 \cdot 7 = 210+28 = 238$.

112. $16 \cdot 13$; $19 \cdot 15$; $17 \cdot 16$.

113. $12^2, 13^2, 14^2, \ldots, 19^2$.
114. $(16x+15)(12x+14)$.
115. $(18a-12)(17a-14)$.
116. $(15y+13)(14y-19)$.
117. $(13x-19)(14x-19)$.
118. $(2a+3b+4c)(a-b)$.
119. $(3p^2+16p-12)(3-p)$.
120. $(x^2-x+1)(x+1)$.
121. $(x^3+x^2+x+1)(x-1)$.
122. $2(x+2)(x+1)$. **123.** $4(a+4)(a-2)$.
124. $26xy-(9x-8y)(5x+2y)-(4y-3x)(15x+4y)$.
125. $(2x+3y+4z)(5x+2y+z)$.
126. $(2x-y+3z)(4x+2y-z)$.
127. $(8x^3-4x^2+7x-6)(x^2-5x-3)$.
128. $(x+4)(x+3)(x+2)$.
129. $(a-5)(a-2)(a-3)$.
130. $(x+6)(x+5)=x^2+11x+30$.
131. $(x+8)(x+3)$. **132.** $(x+7)(x+3)$.
133. $(x+8)(x+9)$. **134.** $(x-4)(x-3)$.
135. $(x-2)(x-10)$. **136.** $(x-8)(x+15)$.
137. $(x+12)(x-6)$. **138.** $2(x+7)(x-12)$.
139. $4(x+11)(x-13)$. **140.** $5(x-16)(x+12)$.

Expresar en producto:

141. x^2+6x+8. **142.** $x^2-16x+63$.
143. $x^2+10x-56$. **144.** $x^2-13x-48$.
145. $y^2-7y-30$. **146.** $x^2-14x+48$.
147. $x^2-5x-84$. **148.** $x^2+27x+180$.
149. $x^2+7x-120$. **150.** $x^2-30x+216$.
151. $a^2-7ab+12b^2$. **152.** $x^2-4xy-21y^2$.

---

153. $(x+y)^2$. **154.** $(x-y)^2$. **155.** $(x+4)^2$.
156. $(3a+2)^2$. **157.** $(5x+1)^2$ **158.** $(1-7y)^2$.
159. $(6x+5)^2$. **160.** $(8-x)^2$. **161.** $(3-2y)^2$.
162. $(4x-6y)^2$ **163.** $(10a+7b)^2$. **164.** $(12x-5y)^2$
165. $(15a+12b)^2$ **166.** $(25p-16)^2$ **167.** $(35a+20b)^2$
168. $3(x+5)^2$. **169.** $5(2a-3b)^2$.
170. $7(8m+10n)^2$. **171.** $10(12b-15c)^2$.
172. $(3a-b)^2+(3a-2b)^2$. **173.** $(p+q)^2-(p-q)^2$.
174. $(2x+3y)^2+(2x-3y)^2$.
175. $(2x+3y)^2-(2x-3y)^2$.
176. $(a+3b)^2+(2a+3b)^2-3(a+4b)^2$.
177. $(5x-3y)^2-(3x-2y)^2-(4x-3y)^2$.
178. $(13x+7y)^2-(5x-3y)^2-(12x+5y)^2$.
179. $[(a+b)-(c-d)]^2$; $[(2x-3y)-(3a+4b)]^2$.
180. $(8-a-3b)^2$; $(2x+y+z-4)^2$.
181. $(a+b+c)^2=\mathbf{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}$
$(a+b-c)^2=\mathbf{a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc}$.
182. $(x+y+z)^2$; $(x-y+z)^2$.
183. $(x+y-z)^2$; $(a-b-c)^2$.
184. $(2a-3b+5)^2$; $(7-5a-6b)^2$.
185. $(7m-3n+5)^2+(7m-5n-3)^2-2(7m+5)^2$.
186. Calcular, aplicando el cuadrado de un binomio:

$$42^2,\ 74^2,\ 83^2,\ 126^2,\ 385^2.$$

Completar el desarrollo del cuadrado de un binomio en los ejercicios 187 a 194.

187. $x^2+10x+\ldots$ **188.** $y^2-18y+\ldots$
189. $m^2-\ldots+36n^2$. **190.** $p^2+\ldots+64q^2$.
191. $\ldots+42x+49$. **192.** $\ldots-390y+225$.
193. $289z^2+340z+\ldots$ **194.** $64x^2-80xy+\ldots$
195. Cubos de los números de 1 a 10.
196. $(x+y)^3$; $(x-y)^3$; $(p\pm q)^3$.

197. $(a \pm 2)^2$ $\quad (3 \pm x)^2$ $\quad (y \pm 1)^2$.
198. $(2a \pm 3)^2$ $\quad (4x \pm y)^2$ $\quad (5a \pm 2b)^2$.
199. $(7x \pm 6y)^2$ $\quad (8a \pm 9b)^2$ $\quad (10c \pm 4)^2$.

---

200. $(x+1)\ (x-1)$; $\quad (y+2)\ (y-2)$.
201. $(9+x)\ (9-x)$; $\quad (5b+8)\ (5b-8)$.
202. $(7a+4b)(7a-4b)$; $\quad (8x+6y)\ \ (8x-6y)$.
203. $(15a+14b)(15a-14b)$
$(13p+11q)(13p-11q)$.
204. $(18u+13v)(18u-13v)$
$(19a+17b)(19a-17b)$.
205. $(45x+35y)(45x-35y)$
$(75t+65s)(75t-65s)$.
206. $(a^2+b^2)(a^2-b^2)$; $\quad (x^2+y^2)(x^2-y^2)$.
207. $(x+y)^2-(x+y)\ \ (x-y)$.
208. $(4a+5b+6c)\ \ (4a+5b-6c)$.
209. $(6x-4y+5z)\ \ (6x+4y-5z)$.
210. $(3x+5y)^2-(3x-5y)^2+(3x+5y)\ \ (3x-5y)$.
211. $(13x+5y-4)^2-(12x-5y+3)^2-(5x-4)$
$(5x+4)$.
212. $64 \,.\, 56 = (60+4)\ \ (60-4) = \ldots$
213. $47 \,.\, 33$ $\quad 58 \,.\, 42$ $\quad 85 \,.\, 75$.
214. $63 \,.\, 77$ $\quad 26 \,.\, 34$ $\quad 82 \,.\, 98$.
215. $79 \,.\, 81$ $\quad 71 \,.\, 89$ $\quad 21 \,.\, 19$.
216. $125 \,.\, 75$ $\quad 385 \,.\, 415$ $\quad 816 \,.\, 784$.

Expresar en producto:

217. $x^2+2xy+y^2$ $\quad p^2-2pq+q^2$.
218. a^2-2a+1 $\quad m^2-6m+9$.
219. $9x^2-12xy+4y^2$ $\quad 36n^2+84pn+49p^2$.
220. $(m+n)^2-4mn$ $\quad (x-y)^2+4xy$.

222. $81a^2-64b^2$ $\quad 121x^2-256y^2$.
223. $289m^2-324n^2$ $\quad 361-144p^2$.

Calcular:

224. $34^2-16^2=(34+16)\ \ (34-16)=$
225. 65^2-35^2 $\quad 77^2-23^2$ $\quad 82^2-18^2$
226. 58^2-42^2 $\quad 97^2-63^2$ $\quad 76^2-34^2$.

30. Ecuaciones con paréntesis.

a) $\quad (3x+8)\ \ (x-2)=(x+4)\ \ (3x-7)$.

Se resuelven los paréntesis:

$$3x^2+2x-16=3x^2+5x-28.$$

Ordenando la ecuación resulta:

De donde: $\quad 3x=12$

$$x=4$$

b) $\quad a(a-x)=b(b-x)$.

Se resuelven los paréntesis:

Se ordena: $\quad a^2-ax=b^2-bx$

$$ax-bx=a^2-b^2.$$

Se saca x factor común en el primer miembro y se convierte en producto el segundo:

$$(a-b)x=(a+b)\ \ (a-b).$$

Se dividen los dos miembros por $a-b$:

$$x=a+b.$$

1. $4(3x-5)+3=19.$
2. $9(9x-8)-1=8.$
3. $5(13x-51)=70.$
4. $2x(5x-3)=10x^2-48.$
5. $3x(4x-5)=12x^2+75.$
6. $2(x+5)+3(x-7)=29.$
7. $7(3x+2)-6(2x+8)=11.$
8. $3(x+8)=60-4(x-5).$
9. $4(x+3)-11\ (x-7)=4(5x+2).$
10. $(x+1)a+5a(x-1)=6b-4a.$
11. $5(x-a)-3(x+2b)=4(a-b)-7(x-b).$
12. $(a-b)x+c(x-1)=a-bx.$
13. $a(x-b)+b(x-a)=a+b-2ab.$
14. $x(a+b)+a(x+b)-b(x+a)-8ab=0.$
15. $(x+5)\ (x-3)=(x-8)\ (x+1).$
16. $(6x+5)\ (x-1)=(2x-3)\ (3x+5).$
17. $(4x+5)\ (10x-3)=(5x-4)\ (8x+5).$
18. $(x-8)\ (x-7)=(x-9)\ (x-5).$
19. $(3x-5)\ (x-2)=(3x+1)\ (x-1).$
20. $(4x+5)\ (9x-4)-(12x-7)\ (3x+4)=6.$
21. $2(x+2)\ (x+5)=(2x+7)\ (x+3).$
22. $2(3x+5)\ (x-3)=3(x-1)\ (2x-1).$
23. $(12x+5)\ (x-1)-2(3x-4)\ (2x+1)=0.$
24. $(12x+5)\ (3x-5)=(6x+10)\ (6x-10)-15.$
25. $(5x+3)\ (5x-3)+88x=(5x+7)\ (5x+8).$
26. $4x(5-16x)+(8x+9)\ (8x-9)=5x+9.$
27. $8(2x^2-5)+(7+4x)\ (7-4x)=6x-15.$
28. $(12x+7)\ (3x-5)-(3x+11)\ (6x-11)=$ $122-43x.$

29. $(8x+7)(8x-7)-(16x-5)(4x+3)=36-$ $-14x.$
30. $(14x+15)\cdot(14x-15)=(14x-5)^2+30.$
31. $(3+4x)^2+(4+3x)^2=(5+5x)^2.$
32. $(4x-11)^2+(3x+23)^2=(5x+10)^2.$
33. $(12x-14)^2+(5x-11)^2=(13x-17)^2.$
34. $(5x+3)^2+(8x+15)\ (3x-16)=(7x-8)^2.$
35. $(6x+5)^2-4(5x-10)=(6x+10)\ (6x-10)+$ $+5.$
36. $2(x-4)^2-(x-2)^2=(x-8)^2.$
37. $(x+a)\ (x-b)-x(x+a)=0.$
38. $(2x+b)\ (x-a)-(x+b)\ (x+a)=x(x-a).$
39. $x(x+a)=(x-a)^2.$
40. $(x+a)^2-(x-b)^2=2a(a+b).$

Problemas.

1. Si a cierto número se agrega 180, resulta 7 veces el exceso del mismo número sobre 60. ¿Cuál es el número?

2. Cierto número aumentado en 3, multiplicado por sí mismo, es igual a su cuadrado más 24. ¿Cuál es el número?

3. El producto de dos números, que se diferencian en 6, tiene 54 unidades más que el cuadrado del menor. ¿Cuáles son los números?

4. La suma de tres números consecutivos es 75. ¿Cuáles son?

5. La edad actual de un padre es cuatro veces la de su hijo. Hace 3 años era el quíntuplo. ¿Cuál es la edad de cada uno?

6. Si un número aumentado en 12 se multiplica por el mismo número disminuido en 5, resulta el cuadrado del número más 31. ¿Cuál es el número?

7. La suma de la edad de una madre con las edades de sus dos hijas es 55 años. La edad de la madre es el doble de la edad de la hija mayor y la suma de las edades de las dos hermanas es 25 años. Calcular las edades.

8. ¿Cuántos litros a E° 0,60 el litro, habrá que mezclar con 180 litros a E° 0,75, cada uno, para que el litro de la mezcla valga E° 0,70?

9. En un gallinero hay conejos y gallinas. ¿Cuántos animales de cada especie hay, si juntos tienen 35 cabezas y 98 patas?

10. Si al cuadrado de un número entero se agrega 17, se obtiene el cuadrado del número entero que sigue. ¿Cuál es el número?

11. Cuatro rollos de alambre de la misma longitud han costado E° 1,92. Al venderlos a E° 0,03 el metro, se ganan E° 0,96. ¿Cuál es la longitud de cada rollo?

12. En un taller trabajan un maestro jefe, 4 obreros y 2 aprendices. Estas personas ganan en suma E° 12,90 diarios. El jefe gana E° 0,90 más que cada obrero y cada obrero E° 1,35 más que un aprendiz. ¿Cuánto gana cada uno por día?

13. La cifra de las decenas de un número de dos cifras es igual al doble de la cifra de las unidades. Invirtiendo el orden de las cifras, resulta un número que tiene 27 unidades menos que el primero. ¿Cuál es el número?

14. La suma de las dos cifras de un número es 12. Restando 18 del número, resulta otro número de dos cifras que se escribe con las mismas cifras en orden inverso. ¿Cuál es el número?

15. La suma de las tres cifras de un número es 12. La cifra de las centenas es la mitad de las decenas y la cifra de las unidades es igual a la suma de las otras dos. ¿Cuál es el número?

16. Encontrar tres números relacionados por las siguientes condiciones: la suma del duplo del primero más el segundo es igual a 75; la suma del duplo del segundo más el tercero es igual a 65, y la suma del duplo del tercero más el primero es 55.

17. Varias personas deben reunir cierta suma de dinero; si cada una aporta E° 24, faltan E° 10, y si dan E° 25, sobran E° 5. ¿Cuál es el número de personas y la suma de dinero?

18. Una persona quiere comprar vino. A. le ofrece 70 l y B. 90 l. Si acepta la oferta de A., le sobran E° 1,20 del dinero que tiene para este negocio, y si acepta la de B., le faltan E° 0,10. ¿Cuál es el dinero que tenía presupuestado, si A. pide E° 0,01 más por el litro que B.?

19. Hace 8 años la edad de un padre era 8 veces la edad de su hijo; y 16 años después de la edad actual, la edad del padre será el doble de la del hijo. ¿Cuál es la edad del padre y la del hijo?

20. Un padre tiene 40 años y su hijo 16. ¿Cuándo la edad del padre es triple de la del hijo? (Discusión).

21. Un mensajero parte con una velocidad de 8 km por hora; después de haber recorrido 24 km vuelve al punto de partida y parte de nuevo con una velocidad de 12 km por hora, para llegar a su destino a la hora fijada. ¿Cuál es la distancia recorrida?

22. La suma de dos números es 17 y la diferencia de sus cuadrados 221. ¿Cuáles son los números?

23. ¿Qué número debe restarse de cada factor del producto 30 · 147 y agregarse a 14 · 62, para que los dos productos sean iguales?

24. Un comerciante vendió cierta clase de género a E° 12 el metro y ganó E° 72 en la venta de toda la pieza. Si hubiera vendido a E° 9 el metro, habría perdido E° 36. ¿Cuántos metros tenía la pieza?

25. A. y B. jugaban en juego de azar. Al principio del juego A. tenía E° 54 y B. 47. Después de algunos juegos, A. tenía E° 5 más que el duplo de lo que le quedaba a B. ¿Cuántos escudos ganó A.?

CAPITULO IV.

División.

31. Definición.—Los dos problemas siguientes explican la doble definición de la división:

1.° 8 metros de género valen E° 9,60. ¿Cuánto vale un metro?

Un metro vale *la octava parte de* E° 9,60 y se escribe E° 9,60 : 8 = E° 1,20.

2.° ¿Cuántos metros de género se pueden comprar con E° 9,60, a E° 1,20 el metro?

Se podrán comprar *tantos metros cuántas veces estén contenidos* E° 1,20 *en* E° 9,60, lo que se escribe E° 9,60 : E° 1,20 = 8.

El primero de los números se llama *dividendo*, el segundo *divisor* y el resultado *cuociente*.

En el primer problema, la división es una *partición*. Si el dividendo es un número concreto, el cuociente tiene la misma denominación del dividendo y el divisor es un número abstracto.

En el segundo problema, la división es una *medición*, por cuanto se trata de averiguar las veces que un número está contenido en otro. En este caso, el cuociente es siempre un número abstracto y el dividendo y divisor dos números homogéneos.

Según esto, el ejemplo:

$$a : b = c$$

significa que *c es la b ava parte de a* o que *b está contenido c veces en a*.

En sentido más general, la *división tiene por objeto buscar un número*, el cuociente, *que multiplicado por un número conocido*, el divisor, *sea igual a otro número dado*, el dividendo.

Según esta definición, la división es la operación inversa de la multiplicación; *se conoce el producto* (dividendo) y *uno de los factores* (divisor) y *se busca el otro factor* (cuociente). (Ejercicios 1 a 10).

32. Consecuencias de la definición de división.

1.ª *El dividendo*, si es múltiplo del divisor, *es igual al producto del cuociente por el divisor*.

$$24 : 6 = 4;\ \text{luego}\quad 24 = 4 \,.\, 6$$
$$a : b = c;\ \text{luego}\quad a = bc.$$

2.ª *El dividendo*, si no es múltiplo del divisor, *es igual al producto del cuociente por el divisor, más el resto*.

$$23 : 9 = 2\ \text{y sobran}\ 5;\ \text{luego}\ 23 = 2 \,.\, 9 + 5.$$

$$a : b = c + \frac{a - bc}{b}$$

c es la parte entera del cuociente y $\frac{a-bc}{b}$ es el cuociente del resto por el divisor. Multiplicando el cuociente por el divisor resulta:

$$b \,.\, \left(c + \frac{a-bc}{b}\right) = bc + a - bc = a.$$

Como el cuociente $a : b$ se puede escribir en la forma $\frac{a}{b}$, decimos que un cuociente se identifica con una fracción, cuyo numerador es el dividendo y su denominador el divisor.

La fracción $\frac{5}{6}$ expresa la sexta parte de 5 enteros.

3.ª Si en el cuociente

$$72 : 12 = 6$$

se multiplica el dividendo por 2, resulta:

$$144 : 12 = 12.$$

Dividiendo en el mismo ejemplo, el dividendo por 2 resulta:

$$36 : 12 = 3.$$

Ahora, multiplicando el divisor por 2, sin variar el dividendo, resulta:

$$72 : 24 = 3.$$

Dividiendo el divisor por 2, resulta:

$$72 : 6 = 12.$$

De donde se deduce que:

Si se hace mayor o menor el dividendo cierto número de veces, permaneciendo invariable el divisor, el cuociente se hace mayor o menor el mismo número de veces, y si se hace mayor o menor el divisor cierto número de veces, permaneciendo invariable el dividendo, el cuociente se hace menor o mayor el mismo número de veces.

Un cuociente o una fracción es, por tanto, *una función* de cada uno de sus términos.

4.ª Sea 18 el dividendo y 6 el divisor, se puede anotar:

$$\frac{18}{6} = 3, \text{ porque } 3 \cdot 6 = 18$$

$$\frac{-18}{6} = -3, \text{ porque } (-3) \cdot 6 = -18$$

$$\frac{18}{-6} = -3, \text{ porque } (-3) \cdot (-6) = 18$$

$$\frac{-18}{-6} = 3, \text{ porque } 3 \cdot (-6) = -18.$$

De donde resulta la regla:

El cuociente de dos términos de igual signo es positivo y el cuociente de dos términos de distinto signo es negativo (Ejercicios 11 a 15).

33.—Dividir potencias de igual base.

Como $a^4 \cdot a^3 = a^7$, (N.° 20)

se sigue que:

$$a^7 : a^4 = a^3 \qquad \text{(N.° 31).}$$

Del mismo modo, de

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

resulta que:

$$a^{x+y} : a^x = a^y.$$

El exponente del cuociente es igual al exponente del dividendo menos el exponente del divisor.

En general $a^m : a^n = a^{m-n}$; luego

Para dividir potencias de igual base se eleva la base a la diferencia de los exponentes. (Ejercicios 16 a 19).

34.—Dividir un producto por un monomio.

$$24a : 8 = \frac{24}{8} \cdot a = 3a,$$

porque $3a \cdot 8 = 24a$; luego

Para dividir un producto basta dividir uno de los factores y multiplicar el resultado por el producto de los demás factores.

Corolario. *Un producto de dos factores dividido por uno de ellos es igual al otro factor.* (Ejercicios 20 a 35).

35. Dividir por un producto.

Ejemplo: $252 : 36;\ 36 = 9 \cdot 4$

$$\begin{aligned} 252 : 36 &= (252 : 9) : 4 \\ &= 28 : 4 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Prueba: $7 \cdot 36 = 252$; luego

Para dividir por un producto se divide sucesivamente por cada uno de sus factores. (Ejercicios 36 a 41).

36. Multiplicar una fracción por un número entero.

Ejemplos: **1)** $\frac{5}{9} \cdot 4$; **2)** $\frac{11}{12} \cdot 4$.

Según número 32, 3.ª, se tiene:

1) $\frac{5}{9} \cdot 4 = \frac{20}{9} = 2\frac{2}{9}$; **2)** $\frac{11}{12} \cdot 4 = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$; luego

Para multiplicar una fracción por un número entero, se multiplica el numerador o se divide el denominador por el entero.

¿Cuál de los dos procedimientos es aplicable siempre? En caso de poder aplicarse los dos procedimientos, ¿cuál es preferible? (Ejercicios 42 a 50).

37. Dividir una fracción por un número entero.

Ejemplos: **1)** $\frac{7}{9} : 4$; **2)** $\frac{8}{9} : 4$.

Según número 32, 3.ª, se tiene:

1) $\frac{7}{9} : 4 = \frac{7}{36}$; **2)** $\frac{8}{9} : 4 = \frac{2}{9}$; luego

Para dividir una fracción por un número entero, se multiplica el denominador o se divide el numerador por el entero.

Contestar las mismas preguntas del número anterior. (Ejercicios 51 a 56).

38. Simplificar y amplificar una fracción.

Si en $\frac{12}{4} = 3$ se multiplican los dos términos por 2, resulta $\frac{24}{8} = 3$.

Si ahora se dividen los dos términos por 2 resulta: $\frac{6}{2} = 3$.

En ambos casos el resultado permanece invariable; luego

Una fracción no cambia de valor cuando se multiplican o se dividen sus dos términos por un mismo número.

En el primer caso la fracción se *amplifica* y en el segundo se *simplifica*. (Ejercicios 57 a 74).

39. Sumar y restar fracciones:

Los sumandos deben ser homogéneos, lo mismo que el minuendo y el sustraendo. Por esta razón, para sumar y para restar fracciones, es necesario que tengan el mismo denominador, porque este término expresa la denominación de una fracción.

El denominador común debe ser el *mínimo común múltiplo* de los denominadores. Como el denominador común es *divisible* por cada denominador de las fracciones que se suman o se restan, es también divisible por cada factor de estos denominadores. Se compone, por esto, del producto de todos los factores primos distintos de los denominadores y afectados del mayor exponente.

De aquí se deduce que para buscar el denominador común, hay que descomponer cada denominador en sus factores primos, para suprimir los factores que lo sean de otros denominadores de las fracciones y formar el producto de los factores que resultan primos entre sí.

Reducidas las fracciones a un común denominador, se suman o se restan los numeradores, colocando al resultado el denominador común.

Ejemplo: $\frac{3a+2b}{6} + \frac{a-7b}{9} - \frac{7a-5b}{12}$ (M. C. M. $=36$).

$$\frac{18a+12b+4a-28b-21a+15b}{36} = \frac{a-b}{36}$$

(Ejercicios 75 a 96).

40. Multiplicar una fracción por otra.

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \cdot 5 \cdot \frac{1}{7}$$

$$= \frac{15}{4} : 7 = \frac{15}{28}$$

En general $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; luego

Para multiplicar una fracción por otra se divide el producto de los numeradores por el producto de los denominadores.

Observación. Antes de formar estos productos conviene hacer todas las simplificaciones posibles. (Ejercicios 97 a 107).

41. Dividir una fracción por otra.

$\frac{5}{8} : \frac{3}{7}$. Dividiendo por 3 se tiene:

$\frac{5}{8 \cdot 3}$ (N.° 37); pero al suprimir el denominador 7, el resultado es 7 veces menor que el pedido (N.° 32, 3.ª). Para tener el resultado que se busca hay que multiplicar por 7 y se tiene:

$$\frac{5 \cdot 7}{8 \cdot 3} = \frac{35}{24} = 1\tfrac{11}{24}$$

En general $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$; luego

Para dividir por una fracción, se multiplica dividendo por la fracción divisor invertida o por valor recíproco de la fracción divisor.

El valor recíproco de un número se obtiene dividiendo la unidad por este número. El valor recíproco de a es $1 : a = \frac{1}{a}$; el valor recíproco de $\frac{a}{b}$ es $1 : \frac{a}{b} = \frac{b}{a}$ (Ejercicios 108 a 118).

42. Dividir un polinomio por un monomio.

$(a - b + c) : d = \frac{a}{d} - \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$, puesto que

(N.° 32, 1.ª)

$$\left(\frac{a}{d} - \frac{b}{d} + \frac{c}{d}\right) d = a - b + c; \text{ luego}$$

Para dividir un polinomio por un monomio, se divide cada término del polinomio por el monomio. (Ejercicios 119 a 130).

43. Dividir un polinomio por otro.

Como la división es la operación inversa de la multiplicación, vamos a derivar de la multiplicación de un polinomio por otro el procedimiento para dividir un polinomio por otro.

Multiplicando:	$8a^2 - 5ab + 4b^2$
Multiplicador:	$3a - 8b$
Producto por 3a:	$24a^3 - 15a^2b + 12ab^2$
Producto por —8b:	$-64a^2b + 40ab^2 - 32b^3$
Producto total:	$24a^3 - 79a^2b + 52ab^2 - 32b^3$

Vamos ahora a dividir el producto obtenido por el polinomio $8a^2 - 5ab + 4b^2$.

$$(24a^3 - 79a^2b + 52ab^2 - 32b^3) : (8a^2 - 5ab + 4b^2) = 3a - 8b$$

$$24a^3 - 15ab^2 + 12ab^2$$

$$-64a^2b + 40ab^2 - 32b^3$$
$$-64a^2b + 40ab^2 - 32b^3$$

cero

En primer lugar hay que ordenar los dos polinomios. En el ejemplo están ordenados según potencias decrecientes de a. Es evidente que el primer término del dividendo es el producto del primer término del divisor por el primer término del factor que se busca; luego, para obtener el primer término del cuociente se divide $24a^3$ por $8a^2$ y resulta $3a$. El producto de $3a$ por el divisor es $24a^3-15a^2b+12ab^2$; restando este producto del dividendo, resulta $-64a^2b+40ab^2-32b^3$, que debe ser el producto del divisor por el segundo término del cuociente. Para encontrar este segundo término del cuociente basta dividir $-64a^2b$ por $8a^2$ y se obtiene $-8b$. El producto de $-8b$ por el divisor es igual al segundo dividendo parcial; el resto es cero.

El cálculo, como se puede observar en el desarrollo, es análogo a la división aritmética. (Ejercicios 131 a 152).

Ejercicios

1. E° 75 : 15. **2.** 48m : 16. **3.** 64 kg : 4.
4. E° 52 : E° 13. **5.** 60m : 12m. **6.** 84 kg : 7kg.

7. Si el divisor es 9 y el cuociente es E° 18, ¿cuál es el dividendo?

8. Si el divisor es 24m y el cuociente es 5, ¿cuál es el dividendo?

9. Si el divisor es 5ab y el cuociente 19a, ¿cuál es el dividendo?

10. Si el divisor es 15, el cuociente 6 kg y el resto es 8 kg, ¿cuál es el dividendo?

---

11. $(+15) : (+3)$; $(-52) : 4$; $84 : (-7)$.
12. $(-96) : (-8)$; $(-240) : (-16)$; $(-120) : (-15)$.
13. $8 : (-9)$; $19 : (-57)$; $(-13) : (-65)$.

14. $\dfrac{72}{-24}$ $\quad \dfrac{-75}{15}$ $\quad \dfrac{-112}{-14}$.

15. $\dfrac{x}{-y}$ $\quad \dfrac{-a}{b}$ $\quad \dfrac{-a}{-b}$

---

16. $a^9 : a^5$ $\quad x^{20} : x^{13}$ $\quad y^6 : y^3$.
17. $p^n : p$ $\quad q^{n+1} : q$ $\quad m^{n-1} : m$.
18. $a^x : a^y$ $\quad y^{p+1} : y^p$ $\quad z^{2n+3} : z^2$.

19. $\dfrac{a^8}{a^3}$ $\quad \dfrac{b^7}{b^2}$ $\quad \dfrac{c^9}{c^5}$ $\quad \dfrac{d^{14}}{d^9}$.

---

20. $18a : 6$. $\quad 28b : 7$. $\quad 15c : c$.
21. $111a : 37$; $115b : (-23)$; $(-152) : (-19)$.
22. $5(a+b) : (a+b)$; $\quad 7(x-y) : (x-y)$.
23. $(ax-bx) : (a-b) = x(a-b) : (a-b) = x$.
24. $(am+m) : (a+1)$; $\quad (ap-bp) : (a-b)$.
25. $(60+4p) : (15+p)$; $(14x-21y) : (2x-3y)$.
26. $(x^2-x) : (x-1)$; $\quad (p^2-q^2) : (p-q)$.
27. $(49x^2-25y^2) : (7x+5y)$.

28. $(4a^2+20a+25) : (2a+5)$.
29. $(9x^2-48x+64) : (3x-8)$.
30. $(21xy+35x+12y+20) : (7x+4)$.
31. $(32pq-56p-12q+21) : (8p-3)$.
32. $(x^2-10x+16) : (x-8)$.
33. $(x^2-11x+24) : (x-3)$.
34. $(x^2+11x+28) : (x+4)$.
35. $(x^2-7x-60) : (x+5)$.

---

36. $18\ abc : 9ab$; $\quad (12a \,.\, 13b) : 4b$.
37. $48b^2x : 16bx$; $\quad 102a^2x : 17a$.
38. $9x^2y : 18xy$; $\quad 10a^2bc^3 : 5abc^2$.
39. $(-140x^3) : 35x$. $\quad 120ab^2 : (-24ab)$.
40. $(-105a^3b^2) : (-21a^2b)$.
41. $(-95a^2b^3c^2) : (-19abc)$.

---

42. Multiplicar $\frac{11}{12}$ por 2, 3, 4, 6, 12.

43. Multiplicar $\frac{5}{6}$ por 7, 11, 13.

44. $\frac{a}{b} \,.\, 3$; $\quad \frac{a}{15b} \,.\, 3$; $\quad \frac{18b}{a} \,.\, 6b$.

45. $\frac{-4a}{b} \,.\, b$; $\quad \frac{1}{3ab} \,.\, (-3ab)$; $\quad \frac{-5b}{6xy^2} \,.\, (-2xy)$.

46. $\frac{4}{a-b} \,.\, (3a-3b)$; $\qquad 8(x+y) \,.\, \frac{5}{4x^2+4xy}$.

47. $\left(\frac{5c}{36a^2b} + \frac{7}{6ab} - \frac{11b^2}{12a}\right) \,.\, 18ab$.

48. $\left(\frac{c}{8x} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}\,x^2y\right) \,.\, 24xy$.

49. $\left(\frac{5}{6x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{3a}{4x^2}\right) \,.\, 12x^2$.

50. $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \,.\, xyz$.

51. Dividir $\frac{24}{25}$ por 2, 3, 4, 6, 8, 12.

52. Dividir $\frac{5}{6}$ por 3, 4, 8, 9, 12.

53. $\frac{a}{b} : 5$; $\quad \frac{54a}{x} : 18$; $\quad \frac{4ab}{c} : 2a$.

54. $\frac{15ac}{2b} : 3c;$ $\frac{18ab}{5c} : 6ab;$ $\frac{36xyz}{5p} : 12xy.$

55. $\frac{5(a-y)}{b+x} : 15(a-y);$ $\frac{18x-12}{-5} : (2-3x).$

56. $\frac{17(a^2-5a+6)}{a+2} : 51(a-3).$

$\frac{136\ (x^2+x-12)}{x+4} : 34\ (x-3).$

Simplificar

57. $\frac{12}{15}$ $\frac{24}{36}$ $\frac{48}{60}$ $\frac{75}{100}.$

58. $\frac{ab}{bc}$ $\frac{x}{xx}$ $\frac{a}{a^2}$ $\frac{ay}{y^2}$

59. $\frac{48a}{72ab}$ $\frac{25a^2b}{75ab^2}$ $\frac{96m^3n^2}{32m^4n^3}$

60. $\frac{3(a+b)}{5(a+b)}$ $\frac{4a+4b}{5a+5b}$ $\frac{3x-6y}{5x-10y}$

61. $\frac{x^2+xy}{xy+y^2}$ $\frac{8x+7y}{64x^2-49y^2}$ $\frac{24x-18y}{44x-33y}$

62. $\frac{x^2-16}{x^2+8x+16},$ $\frac{9x^2+30x+25}{6x+10},$ $\frac{x^2-25}{x^2+x-20}.$

63. $\frac{4y^2-4y+1}{6y-3},$ $\frac{x^2+6x+8}{x^2+7x+12},$ $\frac{x^2+4x-12}{x^2+8x+12}.$

64. Convertir a 60 avos las fracciones:

$\frac{2}{3},$ $\frac{3}{4},$ $\frac{4}{5},$ $\frac{5}{6},$ $\frac{7}{12},$ $\frac{8}{15},$ $\frac{9}{20},$

65. Convertir $\frac{3a}{7}$ al denominador 21a y $\frac{14}{15x}$ al denominador $90x^2$.

66. Convertir $\frac{5}{2a+3}$ al denominador $4a^2-9$ y $\frac{5x+4y}{5x-4y}$ al denominador $25x^2-16y^2$.

67. Convertir $\frac{x+3}{x+8}$ al denominador $x^2+5x-24$.

68. Reducir a un común denominador las fracciones:

a) $\frac{5}{8},$ $\frac{7}{12},$ $\frac{9}{16},$ $\frac{7}{24}.$

b) $\dfrac{5}{12}$, $\dfrac{8}{9}$, $\dfrac{13}{24}$, $\dfrac{11}{18}$.

c) $\dfrac{5a}{3xy}$, $\dfrac{3b}{4x^2y}$, $\dfrac{7}{6xy^2}$.

d) $\dfrac{a}{x+y}$, $\dfrac{b}{x-y}$, $\dfrac{c}{x^2-y^2}$.

e) $\dfrac{3x}{x+2}$, $\dfrac{5x}{x-2}$, $\dfrac{2x}{x^2-4}$, $\dfrac{4}{x^2+4x+4}$.

Transformar las siguientes fracciones *compuestas en fracciones simples* y simplificar (1):

69. $\dfrac{3}{5-\frac{2}{3}} = \dfrac{3 \cdot 3}{(5-\frac{2}{3}) \cdot 3} = \dfrac{9}{15-2} = \dfrac{9}{13}$.

70. $\dfrac{3-\frac{3}{4}}{3+\frac{1}{4}}$, $\dfrac{\frac{5}{6}-2}{\frac{1}{6}-1}$ $\dfrac{\frac{4}{5}+\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}-\frac{1}{2}}$

71. $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$, $\dfrac{\frac{5}{6}-\frac{3}{4}}{\frac{5}{18}}$, $\dfrac{\frac{4}{5}-\frac{1}{3}}{\frac{7}{15}}$.

(1) ***Fracción compuesta*** **es la que contiene fracciones en uno o en sus dos términos, y** ***simple*** **la que contiene expresiones enteras en sus dos términos. Una fracción compuesta se reduce a simple amplificándola por el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones simples que contenga.**

72. $\dfrac{1+\frac{1}{a-1}}{1-\frac{1}{a+1}}$, $\dfrac{\frac{a}{2}-\frac{b}{3}}{\frac{a}{2}+\frac{b}{3}}$, $\dfrac{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}$.

73. $\dfrac{1+\frac{5}{x}}{x+2-\frac{15}{x}}$ $\dfrac{\frac{a+1}{a-1}-1}{\frac{a+1}{a-1}+1}$, $\dfrac{\frac{1}{x^2-y^2}}{\frac{3}{x+y}-\frac{3}{x-y}}$.

74. $\dfrac{\frac{7}{48}+\frac{5}{16}}{\frac{5}{6}-\frac{3}{8}}$, $\dfrac{x-\frac{x+1}{2}}{x+\frac{2x-1}{4}}$, $\dfrac{1+\frac{4-6x}{9x}}{x+\frac{8}{3}+\frac{16}{9x}}$.

Sumar y simplificar

75. $\dfrac{2}{9}+\dfrac{3}{9}$, $\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{3}$, $\dfrac{2a}{5}-\dfrac{a}{5}$.

76. $\dfrac{x+y}{3}+\dfrac{x-y}{3}$, $\dfrac{a+b}{7}-\dfrac{a-b}{7}$.

77. $\dfrac{a+2b}{3a}-\dfrac{5a+3b}{3a}+\dfrac{7a-4b}{3a}$.

78. $\dfrac{5a^2}{2a+5b}-\dfrac{a^2-20ab-25b^2}{2a+5b}$.

79. $\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{5}{6}-\dfrac{3}{7}$, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}$.

80. $\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{8}$, $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{2x}$, $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^2}$.

81. $\frac{3a-2b}{2} - \frac{a-b}{3} + \frac{4a-7b}{6}$.

82. $\frac{9}{20} + \frac{7}{12} - \frac{8}{15}$, $\frac{7x}{10y} - \frac{8x}{15y}$.

83. $\frac{a-6b}{10} - \frac{2b-a}{6} - \frac{b-11a}{15}$.

84. $\frac{1}{a-2} - \frac{2}{3a-6} - \frac{1}{4a-8}$.

85. $\frac{5p-7q}{6p-6q} - \frac{6p-9q}{8p-8q}$.

86. $\frac{x-1}{3x+6} + \frac{x+1}{5x+10} - \frac{x-2}{2x+4}$.

87. $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} - \frac{2ab}{a^2-b^2}$.

88. $\frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+16} - \frac{x-3}{x-4}$.

89. $\frac{3a-1}{a+5} + \frac{2a+1}{a+3} - \frac{4a^2+8a-22}{a^2+8a+15}$

90. $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x^2-3x+2}$.

91. $\frac{5x+4}{x-2} - \frac{3x-2}{x-3} - \frac{x^2-x-16}{x^2-5x+6}$.

92. $3 + \frac{3}{4}$, $a + \frac{1}{2}$, $x - \frac{1}{3}$.

93. $3 - \frac{1}{a}$, $a - \frac{b}{3}$, $\frac{a}{5} - 1$.

94. $x - \frac{y}{x}$, $b - \frac{c+d}{2}$, $a - \frac{a-1}{a}$

95. $1 - \frac{a}{a-b}$, $\frac{a}{a-b} - 1$, $\frac{a}{a+b} - 1$.

96. $2x + \frac{3-2x}{5}$, $2 - \frac{3x-y}{2x-y}$.

Multiplicar y simplificar

97. $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$; $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n}$; $\frac{x^2}{y} \cdot \frac{y}{x^2}$.

98. $\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}$; $\frac{3a}{10} \cdot \frac{5b}{6}$; $\frac{2a}{b} \cdot \frac{b}{a}$.

99. $\frac{7b^2}{ax^2} \cdot \frac{5ax}{14by}$; $\frac{8a^3x^2}{9b^4y^2} \cdot \frac{3a^2y^3}{4bx}$

100. $\frac{1}{x+y} \cdot \frac{a}{x-y}$; $\frac{x^2-y^2}{3x^2} \cdot \frac{6x}{x+y}$.

101. $\frac{4a^2-12a+9}{16-9b^2} \cdot \frac{4+3b}{2a-3}$; $\frac{3a^2b^2}{4x^2y^3} \cdot \frac{8x^4y^5}{9a^5b^2}$

102. $\left(\frac{3}{5x} - \frac{7x}{5} + \frac{xy}{25}\right) \cdot \frac{5x}{21y}$.

103. $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \cdot \frac{ab}{c}$.

104. $\left(\frac{3}{5} - \frac{x}{y}\right) \left(\frac{3}{5} + \frac{x}{y}\right)$.

105. $\left(\frac{5a}{3b} + \frac{3b}{4a} - \frac{5}{6}\right) \left(\frac{3a}{b} + \frac{7}{2}\right)$.

106. $\frac{x^2+7x+10}{x^2+2x-3} \cdot \frac{x^2-4x-21}{x^2+9x+20} \cdot \frac{x^2+3x-4}{x^2-5x-14}$.

107. $\frac{36x^2+60x+25}{a^2-25} \cdot \frac{a^2+11a+30}{36x^2-25} \cdot \frac{(a-5)\ (6x-5)}{(6x+5)\ (a+6)}$.

Dividir y simplificar:

108. $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$, $\frac{4}{5} : \frac{8}{15}$, $\frac{24}{25} : \frac{36}{35}$.

109. $\frac{a}{x} : \frac{b}{x}$, $\frac{a}{b} : \frac{p}{x}$, $\frac{p}{q} : \frac{r}{s}$.

110. $\frac{ax}{by} : \frac{3ab}{xy}$, $\frac{3ax}{5b} : \frac{9xy}{25ab}$.

111. $\frac{3x}{2x-2} : \frac{2x}{x-1}$, $\frac{(x+y)^2}{x-y} : \frac{x+y}{(x-y)^2}$.

112. $\frac{a^2}{a^2-9} : \frac{a}{a+3}$, $\frac{a^2-b^2}{x^2-y^2} : \frac{a+b}{x+y}$.

113. $\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz} : \frac{a+b+c}{x+y-z}$.

114. $a : \frac{a}{2}$, $3b : \frac{4b^2}{c}$, $12xy : \frac{6xy}{5}$.

115. $3x(p + q) : \frac{9(p+q)}{x}$; $\frac{a+5b}{a^2+6ab} : \frac{ab+5b^2}{a^3+6a^2b}$.

116. $(a+b) : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ $\frac{x^2-y^2}{xy} : \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)$

117. $\left(\frac{a}{2x} - \frac{2x}{a}\right) : \left(\frac{2x}{a} + 1\right)$; $\left(\frac{3a}{2b} - \frac{2b}{3a}\right) : \left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b}\right)$

118. $\left(1 + \frac{(a-b)^2}{4ab}\right) : \left(1 + \frac{a}{b}\right)$

---

119. $(4a+4b) : 4$; $(a^2-ab) : a$.
120. $(-4p^2+2pq) : (-2p)$; $(12x^2y-9xy^2) : (-3xy)$.
121. $(15a-6b+3c) : (-3)$.
122. $(52m^2n^2-26m^2n+91mn^2) : 13mn$.
123. $(a+b) : c$; $(a^2+b^2) : ab$.
124. $(24x^2y^5z^4-60x^3y^4z^3+48x^4y^3z^2) : 12x^2y^3z^2$.

125. $\left(\frac{16x}{9y^2} - \frac{x^2}{y^3}\right) : \frac{4x^2}{3y^2}$.

126. $\left(\frac{6}{5}a^3 - \frac{4}{3}ab + 8c\right) : \frac{2}{3}a$.

127. $\left(\frac{5a^2}{24} + \frac{25a}{36} - \frac{5}{72}\right) : \frac{25a}{4}$.

128. $\left(\frac{3}{4}axy - \frac{2}{5}bxy + \frac{7}{10}cxy\right) : \frac{1}{20}xy$.

129. $\left(2\frac{1}{2}abx - 3\frac{1}{3}bcy + 3\frac{3}{4}bd\right) : \frac{5}{4}b$.

130. $\left(1\frac{1}{4}ab - 1\frac{2}{3}ax - 3\frac{1}{3}acy\right) : \left(-2\frac{1}{2}a\right)$.

Dividir los polinomios:

131. $(72x+56y) : (9x+7y)$.
132. $(56a^2-42ab) : (8a-6b)$.
133. $(84x^2y^2+63xy^2) : (12xy+9y)$.
134. $(x^2-x-42) : (x-7)$.
135. $(30x^2+53x+21) : (5x+3)$.
136. $(27x^2-51xy+20y^2) : (3x-4y)$.
137. $(63p^2+110pq+48q^2) : (7p+6q)$.
138. $(21x^3-34x^2y+25y^3) : (7x+5y)$.
139. $(2x^3+3x^2y-3xy^2-2y^3) : (2x+y)$.
140. $(15ax-20bx+3ay-4by : (3a-4b)$.
141. $(a^3+2a^2b-b^3) : (a+b)$.
142. $(3x-x^3+20+6x^4-21x^2) : (4+3x)$.

143. $(38ab^2+29a^2b+6a^3+35b^3) : (2a+7b)$.

144. $(72+174a^2+48a^3+199a) : (15a+8+6a^2)$.

145. $(40x^2y-16x^2+74xy-45xy^2-63y^2) : (8x-9y)$.

146. $(x^4-y^4) : (x+y)$. **147.** $(a^6-b^6) : (a-b)$.

148. $(x^5+y^5) : (x+y)$.

149. $\left(\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}a - \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}\right)$.

150. $\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{4}{9}b^2 + \frac{1}{3}bc - \frac{1}{16}c^2\right) :$

$$\left(\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b - \frac{1}{4}c\right).$$

151. $\left(5\frac{1}{3}x^2 + 2xy - 4\frac{1}{2}y^2\right) : \left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y\right)$.

152. $\left(2\frac{1}{4}a^2 - 8ab + 6\frac{2}{3}b^2\right) : \left(\frac{3}{8}a - \frac{5}{6}b\right)$.

44. Ecuaciones con fracciones.

$$\frac{6x+4}{25} - \frac{6-x}{10} = \frac{x-1}{5} - \frac{8-3x}{20}.$$

Hay que transformar la ecuación en otra que no tenga denominadores. Con este objeto, *se multiplican todos los términos de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores.* M. C. M. = 100.

Haciendo a la vez las simplificaciones, el cálculo se reduce a dividir el mínimo común múltiplo de los denominadores por cada denominador y multiplicar el cuociente por el numerador respectivo y se obtiene:

$$4(6x+4)-10(6-x) = 20(x-1)-5(8-3x).$$

Resolviendo los paréntesis, se tiene:

$$24x+16-60+10x=20x-20-40+15x \text{ (1)}.$$

De donde resulta:

$$x = 16.$$

1. $\frac{x}{4}=3$ $\qquad \frac{1}{2}x=5$ $\qquad \frac{1}{5}x=1$.

2. $\frac{x}{6}+1=2$ $\qquad \frac{x}{7}-2=6$ $\qquad \frac{1}{8}x-3=7$.

3. $\frac{x}{9}=0$ $\qquad 7=\frac{x}{3}$ $\qquad \frac{4}{x}=1$.

4. $3=\frac{12}{x}$ $\qquad 6=\frac{24}{x}$ $\qquad \frac{2}{3}x=6$.

5. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x=5$ $\qquad \frac{1}{3}x-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}x=3$.

6. $\frac{3}{4}x+2=\frac{5}{6}x+1$ $\qquad \frac{x}{2}+6-\frac{x}{4}=\frac{2x}{5}+3$.

(1) Esta ecuación se obtiene directamente de la propuesta, ejecutando inmediatamente la multiplicación.

7. $\frac{5}{6}x - \frac{x}{18} - \frac{3}{4}x = \frac{7}{12} - \frac{2}{9}x + \frac{2}{3}.$

8. $\frac{3}{8}x + 2 - \frac{4}{5}x = 1 + \frac{3}{10}x + 1\frac{1}{2}.$

9. $1\frac{5}{6} + 3\frac{1}{8}x - 4\frac{1}{2} - \frac{7}{12}x - 5\frac{2}{3} = 12.$

10. $2\frac{1}{2}x - \frac{5}{6}x + \frac{5}{12}x - 2\frac{3}{5}x + \frac{7}{15}x + 6 = 0.$

11. $\frac{x}{3} + \frac{3}{4}x = x + 19 - 1\frac{1}{6}x + \frac{2}{3}x +$

$+ \frac{1}{2}x - \frac{4}{9}x.$

12. $\frac{7}{2x} - \frac{8}{3x} + \frac{9}{4x} - \frac{1}{3} = \frac{31-7x}{6x}$

13. $3 - \frac{15+3x}{14} = \frac{2x-5}{21}.$

14. $\frac{4x+5}{8} - \frac{8x-3}{6} + \frac{5-3x}{3} = \frac{3+5x}{2} + \frac{3}{4}.$

15. $\frac{2x+7}{4} - \frac{3x-5}{8} - \frac{8-7x}{5} + \frac{1-9x}{10} + 6 = x.$

16. $\frac{x+3}{4} - \frac{x-4}{9} = \frac{1}{2} - \frac{x+1}{4} + \frac{2x+1}{6}.$

17. $x - \frac{5x+1}{6} + \frac{x-1}{2} = \frac{3x-1}{4} -$

$- \frac{x+5}{3} + \frac{4x-1}{9}.$

18. $\frac{3x-5}{2} - 1 - \frac{2x-1}{3} + \frac{x+3}{4} = \frac{5x-1}{8}.$

19. $\frac{3x-8}{5} - \frac{x-1}{4} + \frac{7-x}{3} = \frac{4-x}{3} - \frac{8x-5}{10}.$

20. $\frac{2(3x-5)}{15} - \frac{3(4x-5)}{7} - \frac{5(6x-7)}{21} = 1\frac{3}{5}.$

21. $\frac{4(x-7)}{15} - \frac{2x+5}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4} -$

$- \frac{x+5}{15} - \frac{2(5x-3)}{5}.$

22. $\frac{3(x-3)}{5} - \frac{2(5-7x)}{3} - 4\frac{1}{6}x =$

$= \frac{7(3x+4)}{10} - 9\frac{14}{15}.$

23. (1) $\frac{51}{68}(x-4) - \frac{58}{87}(x-5) = 1.$

(1) Simplificar primero las fracciones núms. 23 a 27.

24. $\frac{129}{172}(x-2) - \frac{71}{426}(x-1) = \frac{74}{111}(x-4).$

25. $\frac{x^2-11x+30}{2(x-6)} - \frac{2x-7}{3} = 1\frac{1}{2}.$

26. $\frac{3(x^2+x-12)}{2(x+4)} - \frac{2(2-x)}{3} = 5.$

27. $\frac{2x^2-5x-12}{2x+3} - \frac{3x+4}{7} = \frac{6(x-2)}{21}$

28. (1) $\frac{4x+1}{3} - \frac{4x-5}{4} - \frac{x+5}{6} = \frac{2x+9}{3x+9}.$

29. $\frac{2x+5}{3} - \frac{3(x+2)}{5} - \frac{2x-7}{15} = \frac{14-x}{4x-9}.$

30. $\frac{2x-3}{6} + \frac{4x+3}{8} = \frac{16x-15}{24} + \frac{x+3}{5x+2}.$

31. $\frac{3x-7}{4} - \frac{7+5x}{9} - \frac{3x+2}{5x-1} + 2\frac{1}{12} = \frac{5x-7}{18}.$

32. $\frac{12}{5(x+3)} - \frac{7}{10} = \frac{4}{3(x+3)} - \frac{1}{30}.$

33. $\frac{5}{2(2x-1)} + \frac{3}{3(2x-1)} + 3 = \frac{4}{3(2x-1)} + \frac{7}{6}$

(1) Reunir primeramente en una fracción los términos en los cuales no figura x en el denominador, ejercicios 28 a 31.

34. $\frac{3x-1}{2x-3} - \frac{x+9}{4x-6} = 1.$

35. $\frac{5}{3x-2} - \frac{7x+2}{9x-6} = 1.$

36. $\frac{3(11x-9)}{20x-45} - \frac{2(3x-6)}{4x-9} = 1.$

37. $\frac{5x}{2x-2} - \frac{2x+3}{3x-3} + \frac{3x+2}{4x-4} - \frac{4x+1}{5x-5} = 2.$

38. $\frac{5}{2x-3} - \frac{3x-8}{4x-6} = \frac{7}{9} - \frac{6x-1}{10x-15}.$

39. $\frac{5x+3}{7x-9} - \frac{4x+9}{9-7x} = 2.$

40. $\frac{2}{4x-5} - \frac{6x+5}{16x^2-25} = \frac{3}{4x+5}.$

41. $\frac{8x+1}{x-1} + \frac{4-7x}{x+1} - \frac{x^2+1}{x^2-1} = 0.$

42. $\frac{x+7}{2x-3} - 1 = \frac{44}{4x^2-9} - \frac{2x-7}{4x+6}.$

43. $\frac{5x}{x+1} - \frac{x-17}{x^2+2x+1} = 5.$

44. $\frac{3x}{x-1} + \frac{6}{x^2+2x-3} + \frac{7x}{x+3} = 10.$

45. $\frac{7x+5}{x-4} - \frac{6x-1}{x-3} - \frac{1}{x^2-7x+12} = 1.$

46. $\frac{x-1}{x-3} + \frac{x-3}{x+1} = 2.$

47. $\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{2x}} = 3.$ 48. $\frac{2}{\frac{3}{x} + \frac{4}{5x}} = 2\frac{1}{2}.$

49. $\frac{7}{\frac{4}{3x} - \frac{3}{5x}} = \frac{5}{11}.$ 50. $3 + \frac{1}{5} = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}.$

51. $\frac{5}{\frac{3}{4x} - \frac{7}{6x}} = \frac{31}{\frac{4}{3x} + \frac{5}{4x}} - 144.$

52. $\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{x}} = \frac{11 + \frac{3}{x}}{11 - \frac{8}{x}}$

53. $x - \frac{x}{a} = b.$ 54. $\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = 2.$

55. $\frac{ax}{bc} + \frac{bx}{ac} + \frac{cx}{ab} = 1.$

56. $\frac{7a-bx}{2a} - \frac{5b-cx}{3b} - \frac{11c-ax}{6c} = 0.$

57. $\frac{x+a}{x-b} + \frac{x+b}{x-a} = 2.$

58. $\frac{x-a}{2b} - \frac{x+3b}{3a} = \frac{3a-13b}{6b}.$

59. $\frac{ax-b}{ax+b} - \frac{ax}{ax-b} = \frac{ab}{a^2x^2-b^2}.$

60. $\frac{ax}{b} - \frac{b}{a}(x-b) = a.$

61. $\frac{ax-b^2}{a} - \frac{a(b-x)}{b} + \frac{b^2}{a} = a.$

62. $\frac{b-x}{a+x} + \frac{c-x}{a-x} = \frac{a(c-2x)}{a^2-x^2}.$

63. $\frac{3(x-a)}{b} - \frac{2(x-b)}{a} = 1.$

Problemas.

1. ¿Qué número sumado con $\frac{1}{12}$ es $\frac{3}{4}$?

2. ¿De qué número se resta $2\frac{1}{3}$ para obtener $3\frac{5}{6}$?

3. ¿Qué número multiplicado por $\frac{4}{5}$ da $\frac{2}{3}$ como producto?

4. ¿Por qué número hay que dividir $\frac{5}{6}$ para obtener $\frac{3}{4}$?

5. ¿De qué número hay que restar $5\frac{1}{2}$ para obtener la sexta parte de ese número?

6. ¿Qué número sumado con sus $\frac{5}{6}$ y con sus $\frac{3}{8}$ es 318?

7. La diferencia entre los $\frac{7}{12}$ y los $\frac{8}{15}$ de un número es 6. ¿Cuál es el número?

8. La diferencia entre un número y sus $\frac{5}{12}$ es igual a los $\frac{3}{4}$ del número menos 10. ¿Cuál es el número?

9. El producto de un número por $4\frac{1}{3}$ excede a 200 en tantas unidades como faltan al número para completar 200. ¿Cuál es el número?

10. Una persona invierte los $\frac{3}{4}$ de su dinero y le sobra la tercera parte menos E° 10. ¿Cuánto dinero tenía?

11. Un deudor paga $\frac{2}{5}$ de una deuda y queda debiendo los $\frac{3}{10}$ más E° 450. ¿Cuál era la deuda?

12. Si me adivinas cuántas nueces tengo, dijo un niño a otro, te regalo la cuarta parte menos 2 nueces o, lo que es lo mismo, la sexta parte más una nuez. ¿Cuántas nueces tenía?

13. En un ataque del enemigo, la mitad de los soldados de una patrulla cayó prisionera, la 6.ª parte quedó herida, la 8.ª parte murió y salvaron 25 soldados. ¿De cuántos soldados se componía la patrulla?

14. Si a un número se suma 5, se multiplica la suma por 3, se resta 6 del producto y se divide la diferencia por 7, se obtiene un número que tiene 5 unidades menos que el número. ¿Cuál es el número?

15. Cierto número de personas deben pagar una cuenta en partes iguales. Si cada una paga E° 4,35, faltan E° 0,20 y si paga E° 4,40, sobran E° 0,20. ¿A cuánto ascendía la cuenta y cuántas personas eran?

16. El valor de una fracción es $\frac{3}{5}$. Agregando 3 al numerador y restando 3 del denominador, el valor de la fracción se convierte en $\frac{3}{4}$. ¿Cuál es la fracción?

17. ¿Qué número hay que agregar a los términos de la fracción $\frac{23}{40}$ para que valga $\frac{2}{3}$?

18. A las 6 A. M. parte un mensajero desde un lugar A, recorriendo un km en 12 minutos. A las $10\frac{1}{2}$ A. M. se envía otro mensajero que recorre un kilómetro en 3 minutos para alcanzar al primero. ¿A qué distancia y a qué hora el segundo mensajero alcanzará al primero?

19. De un campamento A se envía una patrulla montada hacia un pueblo B, con la orden de recorrer $9\frac{3}{8}$ km por hora. Hora y media después se despacha otra patrulla que, para alcanzar a la primera debe recorrer $12\frac{3}{16}$ km por hora. ¿Cuántas horas después de la partida de la primera patrulla se reúnen las dos patrullas y a qué distancia de A?

20. Un obrero puede hacer un trabajo en 12 días y otro en 15 días de nueve horas de trabajo. ¿En qué tiempo hacen el trabajo los dos juntos?

21. Un depósito de agua puede llenarse por una llave en 3 horas y por otra en 4 horas; pero una tercera llave puede vaciarlo en 6 horas. ¿En qué tiempo se llenará el depósito abriendo las tres llaves a la vez?

22. La edad de un padre es 29 años, que equivale a $3\frac{1}{3}$ veces la edad de su hijo menos un año. ¿Cuál es la edad del hijo?

23. Calcular la edad de dos personas, sabiendo que hace 8 años la edad de la primera era el doble de la edad de la segunda y que 12 años después de la edad actual, la edad de la segunda será $\frac{3}{4}$ de la edad de la primera.

24. La suma de dos números es 200. Dividiendo el primero por 16 y el segundo por 10, la diferencia de los cuocientes es 6. ¿Cuáles son los números?

25. Un mensajero debe recorrer cierta distancia con una velocidad de 12 km por hora; pero la ha recorrido con una velocidad de 8 km por hora y por esto ha llegado a su destino con dos horas de atraso. ¿Cuál es la distancia?

26. Dos móviles A y B se mueven en una misma circunferencia y en una misma dirección. A recorre 15 m en 4 segundos y B 10 metros en 3 segundos. Se juntan por primera vez 12 segundos y por segunda vez 72 segundos después de principiar el movimiento. ¿Cuál es su distancia al principio del movimiento y cuál es la longitud de la circunferencia?

27. Un remero demora un minuto en recorrer 50 m en la dirección de las aguas de un río y 20 m en la dirección opuesta. ¿Qué distancia recorre en un viaje de ida y vuelta desde las $10\frac{3}{4}$ A. M. hasta las 2 horas 22 minutos de la tarde?

28. Repartir E° 1 020 entre A, B y C, de modo que B reciba $\frac{3}{4}$ de la parte de C más E° 180 y A $\frac{5}{6}$ de la parte de B más E° 120. ¿Cuánto recibe cada persona?

29. Los $\frac{3}{4}$ de un capital están colocados al 6% y el resto al 5%. El interés anual de la primera parte es E° 910 mayor que el de la segunda. ¿Cuál es el capital?

30. Los $\frac{2}{3}$ de un capital al 3% y el resto al $4\frac{1}{2}$% forman entre capital e intereses en 3 años E° 9 945. ¿Cuál es el capital?

31. Dividir E° 88 000 en dos partes tales que colocadas al 5% la primera durante 5 años y la segunda durante 10 años, produzcan la misma suma entre capital e intereses.

32. Se colocan E° 7 500 a cierto tanto por ciento de interés y E° 2 500 a un 2% más. El interés anual de los dos capitales es E° 550. Calcular los tantos por cientos.

33. Una persona coloca E° 2 000 al 4% y recibe como intereses anuales E° 10 menos de los que le produce otro capital de E° 1 500. ¿A qué tanto por ciento está colocado el segundo capital?

34. Dividir E° 50 000 en dos partes, de modo que la primera parte al 5% y la segunda al 6%, produzcan en suma E° 2 800 anuales.

35. A. compra una casa a B. en E° 12.600, a 3 meses plazo; pero habiendo pagado A. al contado, se le hizo 6% anual de descuento. ¿Cuánto pagó A.?

36. Un capitalista presta E° 6 440 al 4%, y $1\frac{1}{2}$ años más tarde presta E° 8 320 al $3\frac{1}{2}$%. ¿Después de cuántos años el segundo capital habrá ganado el mismo interés que el primero?

37. Una persona coloca cierta suma al 5% durante 3 años 2 meses. Después de este tiempo reúne el capital con sus intereses y coloca la tercera parte al 6% y el resto al 3%. Si los intereses anuales de las dos partes son E° 458,70, ¿cuál es el capital primitivo?

38. Una letra de E° 480, descontada al 4,5%, se cancela en E° 475,80. ¿Cuántos días se anticipó el pago?

39. ¿Cuántos kilogramos de chocolate a E° 3,30 el kilogramo se mezclan con 300 kg de chocolate a E° 2,75 el kilogramo para que resulte una mezcla de E° 2,97 el kilogramo sin ganancia ni pérdida?

40. Se mezcla perfume de E° 12,85 y E° 9,60 el litro. ¿Cuántos litros de cada clase entran en una mezcla de 100 litros a E° 11,55 el litro?

41. Dos automóviles que se encuentran a una distancia de 39 km uno del otro, parten al mismo tiempo a encontrarse. El primero recorre 3 km en 5 minutos y el segundo 2 km en 3 minutos. ¿Después de cuántos minutos estarán a una distancia de 20 km?

45. Los símbolos $\frac{a}{0}$, $\frac{a}{\infty}$, $\frac{0}{a}$ y $\frac{0}{0}$.

En la discusión de un problema, en la solución de una ecuación y en la valuación de una expresión algebraica, pueden intervenir los valores *cero* (0) o *infinito* (∞).

Respecto a cero, hay que distinguir el *cero absoluto* y que se obtiene restando una cantidad de sí misma, del *cero límite*, que es el valor hacia el cual tiende una cantidad variable que disminuye constantemente de valor sin pasar al sentido opuesto. El cero es así el límite entre los números positivos y negativos y su valor, se concibe como menor que cualquiera cantidad positiva, por pequeña que sea.

***Infinito* es la cantidad mayor que cualquier valor imaginable, por grande que sea.**

El gráfico de los números reales se prolonga, a partir de cero, en dos sentidos opuestos en progreso inacabable. En el sentido positivo tiende a $+\infty$ y en el sentido negativo a $-\infty$.

Anotemos el valor que representan los símbolos de este párrafo.

1. $\frac{a}{0} = \infty$. El valor de una fracción aumenta, si el denominador disminuye, permaneciendo constante el numerador; si el denominador sigue disminuyendo hásta llegar a cero (cero límite), la fracción adquiere un valor mayor que cualquier otro, por grande que sea, es decir, se hace *infinitamente grande*, vale infinito. La división por 0 absoluto no está definida.

2. $\frac{a}{\infty} = 0$. Una fracción disminuye cuando su denominador crece, permaneciendo invariable su numerador. Cuando el denominador sea mayor que cualquier valor imaginable, por grande que sea, la fracción tendrá un valor menor que cual-

quier otro valor, por pequeño que sea, es decir, la fracción será tan pequeña que su diferencia con cero será despreciable.

3. $\frac{0}{a} = 0$, porque toda cantidad finita y distinta de cero multiplicada por cero es igual a cero. Al mismo resultado se llega diciendo que el valor de una fracción disminuye cuando disminuye el numerador, permaneciendo invariable el denominador; de manera que cuando el numerador se anula, la fracción vale cero.

4. $\frac{0}{0}$ es un *valor indeterminado*, puesto que cualquier número multiplicado por cero es igual a cero. Es también un símbolo de indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$.

CAPITULO V

Desigualdades e inecuaciones

Definición.—Un número real a es mayor que otro número real b si existe un número positivo m tal que $a = b + m$. Esto equivale a decir que la diferencia $a - b$ es positiva.

La notación empleada es

$$a > b$$

Si un número real c es menor que otro número real d, se escribe

$$c < d$$

Se llama desigualdad a toda expresión de la forma $a > b$ o $c < d$.

Primer miembro de una desigualdad es la expresión que está a la izquierda del signo de desigualdad y segundo miembro a la que está a la derecha.

Las desigualdades $a > b$ y $c > d$ se dice que son del mismo sentido y las desigualdades $a > b$ y $c < d$ de distinto sentido.

Propiedades de las desigualdades.

Teorema I.—Si $a > b$ y $b > c$, resulta $a > c$.
Demostración.

$$\begin{aligned} a &= b + m \\ b &= c + n \\ \hline a + b &= b + c + m + n \\ a &= c + m + n \end{aligned}$$

o sea, $a > c$

Teorema II.—Si a ambos miembros de una desigualdad se le suman o restan cantidades iguales, la desigualdad se mantiene en el mismo sentido.

Demostración. Si $a > b$, se tiene:

$$\begin{aligned} a &= b + m \\ a + c &= b + m + c \\ \hline \text{luego: } a + c &> b + c \end{aligned}$$

En forma análoga se demuestra que
$a - c > b - c$

Consecuencia de este teorema: se pueden eliminar términos de uno de los miembros de una desigualdad colocándolos en el otro miembro con signo contrario.

Teorema III.—Si se multiplican o dividen ambos miembros de una desigualdad por un mismo número positivo, la desigualdad no cambia de sentido.

Demostración.

$$\begin{aligned} \text{Si } a &> b \\ a &= b + m \\ ac &= (b + m)c \\ ac &= bc + cm \\ \text{luego, } ac &> bc \end{aligned}$$

Al dividir ambos miembros de la igualdad $a = b + m$ por c

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c} + \frac{m}{c}$$

$$\text{luego } \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

Teorema IV.—Si se multiplican o dividen ambos miembros de una desigualdad por un mismo número negativo, la desigualdad cambia de sentido.

Si $a > b$, por hipótesis se tiene:

$$\begin{aligned} a &= b + m \\ a(-c) &= (b+m)(-c) \\ -ac &= -bc - mc \\ -ac &= -bc + (-mc) \end{aligned}$$

y como mc es negativo $-ac < -bc$

Y en el caso de la división por $-c$, equivale a multiplicar ambos miembros por el número negativo $-\frac{1}{c}$, en consecuencia:

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

Aplicaciones:

1) Se pueden eliminar denominadores de los dos miembros de una desigualdad multiplicándolos por un múltiplo de los denominadores. Si el factor es positivo, la desigualdad conserva su sentido y si es negativo, cambia de sentido.

2) Si se cambian los signos de todos los términos de una desigualdad, ésta cambia de sentido porque equivale a multiplicarla por -1.

Teorema V.—Si se resta a una igualdad, miembro a miembro, una desigualdad se obtiene una desigualdad de sentido contrario a la que se restó.

Demostración. Si se considera la igualdad $a = a$ y la desigualdad $b > c$ tal que $b = c + m$, se tiene:

$$\begin{array}{r} a = a \\ \underline{b = c + m} \\ a - b = a - c - m \end{array}$$

lo que equivale a $a - b + m = a - c$

o sea, $a - b < a - c$

Teorema VI.—Si se suman miembro a miembro desigualdades del mismo sentido se obtiene otra desigualdad del mismo sentido.

Demostración. Si $a > b$ y $c > d$, se tiene, por hipótesis:

$$\begin{array}{r} a = b + m \\ \underline{c = d + n} \\ a + b = b + d + m + n \end{array}$$

luego: $a + c > b + d$

Nota: al restar desigualdades del mismo sentido no hay seguridad en la relación que se obtiene.

Teorema VII.—Si se restan miembro a miembro dos desigualdades de distinto sentido, se obtiene una desigualdad del mismo sentido que la del minuendo.

Demostración.

Si se tiene $a > b$ y $c < d$,

$a = b + m$

$c = d - n$ (partiendo de $d = c + n$)

restando: $a - c = b - d + (m + n)$

luego: $a - c > b - d$

Teorema VIII.—Si se multiplican miembro a miembro dos desigualdades del mismo sentido, siendo todos sus miembros positivos, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido

Demostración. Si $a > b$ y $c > d$,

$$\begin{array}{r} a = b + m \\ \underline{c = d + n} \\ ac = bd + bn + dm + mn \end{array}$$

luego: $ac > bd$

Teorema IX.—Si dos números desiguales son del mismo signo, sus valores recíprocos son desiguales en sentido contrario.

Demostración. Sea

$$a > b$$

Por ser a y b del mismo signo el producto ab es positivo y según el teorema III, se tiene:

$$a \cdot \frac{1}{ab} > b \cdot \frac{1}{ab}$$

y simplificando en cada miembro

$$\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$$

o sea, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

Teorema X.—Si dos números desiguales son de distinto signo, sus valores recíprocos son desiguales en el mismo sentido.

Demostración. Sea

$$a > b$$

El producto ab es negativo y según el teorema IV, se tiene:

$$a \cdot \frac{1}{ab} < b \cdot \frac{1}{ab}$$

y simplificando

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

o sea, $$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

INECUACIONES.

Existen dos clases de desigualdades:

a) Las desigualdades que se verifican para cualquier valor de las variables:

Por ejemplo

$$(a-2)^2 + 1 > 0$$

es válida para cualquier número, ya sea positivo o negativo.

b) Las desigualdades que se verifican sólo para ciertos valores numéricos de las variables. Por ejemplo

$$3x - 4 > x + 2$$

es sólo válida para los valores de $x > 3$.

Estas desigualdades se llaman **inecuaciones**.

Resolver una inecuación es determinar el dominio al cual pertenece la incógnita.

Se llama **dominio** de una variable al conjunto de valores que ella puede tomar.

Para resolver una inecuación se aplican los teoremas sobre desigualdades expuestos anteriormente.

Ejemplo: resolver la inecuaciones.

$$\frac{3x}{2} - \frac{x}{5} > 1 + \frac{x}{4}$$

Para eliminar denominadores se multiplican ambos miembros de la inecuación por 20 (Teorema III)

$$30x - 4x > 20 + 5x$$

Se reúnen los términos con x en uno de los miembros y los términos conocidos en el otro (Teorema II).

$$21x > 20$$

Aplicando de nuevo el teorema III

$$x > \frac{20}{21}$$

Los números mayores que $\frac{20}{21}$ satisfacen a la inecuación.

Ejercicios.

1. $2x - 6 > x + 1$
2. $x - 5 > 11 - 7x$
3. $5x - 1 > x + 11$
4. $2x - 8 > 9x - 10$
5. $3x - 4 < x + 6$
6. $8x - 19 > 11x - 4$
7. $3(x+2) + 5(x-1) > 2$
8. $2(5x-1) - 4(1-x) > 8$
9. $7(x-3) + 8(x-1) > 2(x-5)$
10. $(x+2)(x+5) > (x+1)(x-2)$
11. $(2x-4)(x+3) < (x-3)(2x-1)$
12. $2(x+2)(x+5) > (2x+7)(x+3)$
13. $(x-8)(x-7) - (x-9)(x-5) < 0$

CAPITULO VI

Sistema de ecuaciones simultáneas de primer grado con dos y tres incógnitas.

Ecuaciones indeterminadas. Una ecuación con dos incógnitas, x e y, es de primer grado cuando puede reducirse a la forma $ax+by=c$; por ejemplo $3x+2y=18$.

De la ecuación:

$$3x+2y = 18$$

se deducе:

$$x = \frac{18-2y}{3}$$

$$y = \frac{18-3x}{2}.$$

Estos resultados indican sólo el valor de una incógnita en función de la otra; pero no expresan un *valor determinado* de ninguna de ellas.

Se puede, sin embargo, atribuir valores arbitrarios a una de las incógnitas y deducir de ellos valores correspondientes de la otra.

Por ejemplo: **para** $y=1$, $x=5\frac{1}{3}$;
para $y=2$, $x=4\frac{2}{3}$;
para $y=3$, $x=4$.

La ecuación propuesta tiene, pues, infinitas soluciones; de aquí el nombre de **ecuación indeterminada** que se da a una ecuación de primer grado con dos (o más) incógnitas, en contraposición a una ecuación de primer grado con una sola incógnita, que tiene *una* solución y se llama, por esto, *ecuación determinada*.

Ecuaciones simultáneas. Si se forma otra ecuación con las mismas incógnitas de la ecuación $3x+2y=18$, por ejemplo, $5x-6y=2$,

se obtiene que: $x = \frac{6y+2}{5}$.

Para que los valores de x e y satisfagan al mismo tiempo las dos ecuaciones, es necesario que con el mismo valor de x se obtenga *simultáneamente:*

$$x = \frac{18-2y}{3} = \frac{6y+2}{5}.$$

La identidad de los valores da x en función de y en ambas ecuaciones da lugar a la ecuación:

$$\frac{18-2y}{3} = \frac{6y+2}{5}.$$

Dando forma entera a esta ecuación, resulta:

$$90-10y=18y+6$$

De donde:
$$28y=84$$
$$y=3$$

Sustituyendo este valor en:

$$x = \frac{18-2y}{3}, \text{ se encuentra:}$$

$$x = 4.$$

Las dos ecuaciones se satisfacen con los valores $x=4$ e $y=3$, por lo cual se llaman *ecuaciones simultáneas*.

Dos ecuaciones simultáneas forman un *sistema de ecuaciones con dos incógnitas*. Las dos ecuaciones del sistema deben ser independientes la una de la otra, es decir, una de las ecuaciones no debe ser una mera consecuencia de la otra. Un sistema de ecuaciones simultáneas se llama *determinado*, si se compone de tantas ecuaciones independientes como incógnitas tiene, e *indeterminado* si tiene más incógnitas que el número de ecuaciones. En este caso tiene infinitas soluciones.

84. Eliminación. Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, se *elimina* una de las incógnitas, combinando las ecuaciones de modo que resulte una ecuación con una incógnita.

Eliminación es el procedimiento que hace desaparecer una incógnita de un sistema de ecuaciones:

Los métodos principales de eliminación son *eliminación por sustitución y por reducción*, llamado también *por adición y sustracción*.

85. Eliminación por sustitución. Este método consiste en despejar en una de las ecuaciones, una de las incógnitas en función de la otra y sustituir este valor en la otra ecuación.

Ejemplo:
$$\left.\begin{array}{l} 3x+4y=31 \\ 4x+6y=44 \end{array}\right|$$

Se despeja x en la primera ecuación:

$$x = \frac{31-4y}{3}.$$

Se sustituye en la segunda ecuación:
$$\frac{4(31-4y)}{3} + 6y = 44.$$

Se multiplica por 3 y se resuelve el paréntesis:

De donde:
$$124-16y+18y = 132$$
$$2y = 8$$
$$y = 4$$

Se sustituye este valor en $x = \dfrac{31-4y}{3}$

$$x = 5.$$

Este método se aplica de preferencia cuando una de las incógnitas tiene como coeficiente la unidad.

Eliminación por reducción. Este método consiste en igualar en las dos ecuaciones los coeficientes de la incógnita que se trata de eliminar. Este coeficiente común debe ser igual al mínimo común múltiplo de los coeficientes de la incógnita en las ecuaciones del sistema. Con este objeto, se multiplica cada ecuación por el número que multiplicado por el coeficiente de la incógnita por eliminar dé el coeficiente común; en seguida se suman las ecuaciones resultantes cuando la incógnita que se debe eliminar tiene signos distintos en las dos ecuaciones y se restan, si los signos son iguales.

La ecuación que resulta contiene una sola incógnita, cuyo valor se calcula.

Para tener la ecuación con la otra incógnita se repite el procedimiento de eliminación de la incógnita conservada en el primer cálculo o bien se sustituye el valor encontrado, en una de las ecuaciones.

Ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} 9x-8y&=32 \\ 7x-6y&=26 \end{aligned}\right| \begin{aligned} &.\,3 \\ &.\,4 \end{aligned}$$

Para eliminar y se multiplica la primera ecuación por 3 y la segunda por 4, porque el mínimo común múltiplo de 8 y 6 es 24. El sistema se transforma en el siguiente:

$$\begin{aligned} 27x-24y&=96 \\ 28x-24y&=104 \end{aligned}$$

Restando la primera ecuación de la segunda,

resulta:

$$x=8$$

Para encontrar el valor de la otra incógnita se sustituye el valor encontrado en una de las ecuaciones, en la más sencilla.

Se sustituye en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 56-6y&=26 \\ -6y&=-30 \\ 6y&=30 \\ y&=5 \end{aligned}$$

Si el valor encontrado para la primera incógnita no es sencillo, conviene repetir la operación de eliminación con respecto a la otra incógnita.

Ejercicios

1. $\left.\begin{aligned} x&=5 \\ x+y&=8 \end{aligned}\right|$

2. $\left.\begin{aligned} x-y&=9 \\ y&=10 \end{aligned}\right|$

3. $\left.\begin{aligned} x+y&=7 \\ y&=2x-5 \end{aligned}\right|$

4. $\left.\begin{aligned} 6y-x&=8 \\ x&=5y-6 \end{aligned}\right|$

5. $\left.\begin{aligned} 2x-y&=1 \\ 4x+5y&=23 \end{aligned}\right|$

6. $\left.\begin{aligned} 8x+3y&=23 \\ 5x+y&=10 \end{aligned}\right|$

7. $\left.\begin{aligned} 10x-y&=8 \\ 7x-3y&=1 \end{aligned}\right|$

8. $\left.\begin{aligned} 7x-8y&=-2 \\ 9x-y&=81 \end{aligned}\right|$

9. $\left.\begin{aligned} 4x+6y&=12 \\ 5x-y&=-2 \end{aligned}\right|$

10. $\left.\begin{aligned} 6x-7y&=35 \\ 4x-5y&=23 \end{aligned}\right|$

11. $\begin{cases} 21x+35y=21 \\ 5x-7y=5 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 18x-y=367 \\ 17x-y=333 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 11x-6y=16 \\ 7x+12y=26 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x+25y=379 \\ x+17y=259 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 8x+3y=46 \\ 5x-3y=19 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 19x+5y=200 \\ 23x+5y=240 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 11x-24y=31 \\ 17x-8y=77 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 7x+12y=66 \\ 9x-8y=38 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 13x-12y=1 \\ 9x+4y=13 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 8x+9y=7 \\ 10x-6y=3 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 9x+10y=12 \\ 6x+15y=13 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 24x+20y=38 \\ 36x-30y=-27 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3(x-2)+2(y-3)=7 \\ 6(x-1)-5(y+1)=-18 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 7(x+2)+9(y-1)=28 \\ 4(x-2)-6(y+1)=-12 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3(2x-1)-5(y+3)=9 \\ 4(3x-1)+7(y+2)=13 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 10(x+5)-7(y+3)=-49 \\ 9(x+4)+14(y-4)=-9 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 12(x-7)+5(y+1)=30 \\ 18(x-5)-(y-4)=35 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 7(x+1)-2=2(y+3) \\ 5(x-1)+3=3(y-2) \end{cases}$

29. $\begin{cases} 5(2x-1)-11=4(5y+1) \\ 3(5x+1)-59=2(3y-1) \end{cases}$

30. $\begin{cases} 11(3x-1)+11=-3(8-y) \\ 22(x+1)-13=9(y-7) \end{cases}$

31. $\begin{cases} (x-4)(y+7)=(x-3)(y+4) \\ (x+5)(y-2)=(x+2)(y-1) \end{cases}$

32. $\begin{cases} (x+3)(y+5)-(x+1)(y+8)=0 \\ (2x-3)(5y+7)+2(6-5x)(y+1)=0 \end{cases}$

33. $\begin{cases} (x-6)(y-3)+(x-4)(4-y)=0 \\ (x-10)(y-1)+(x-9)(3-y)=0 \end{cases}$

34. $\begin{cases} \dfrac{3x}{2}+y=9 \\ x+\dfrac{y}{3}=5 \end{cases}$

35. $\begin{cases} x-\dfrac{2y}{3}=8 \\ \dfrac{5x}{12}+y=11 \end{cases}$

36. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=5 \\ 5x-\dfrac{y}{6}=8 \end{cases}$

37. $\begin{cases} 8x+5y-34=0 \\ \dfrac{2x}{3}+\dfrac{7y}{2}+5=14 \end{cases}$

38. $\begin{cases} x+y-\dfrac{3}{4}=0 \\ 2x-y-\dfrac{3}{4}=0 \end{cases}$

39. $\begin{cases} \dfrac{x}{6}=5(y-3) \\ \dfrac{x}{4}=4\left(y-\dfrac{5}{4}\right) \end{cases}$

40. $$\left.\begin{aligned} \tfrac{2}{3}x+\tfrac{3}{5}y&=17\\ \tfrac{3}{4}x-\tfrac{2}{3}y&=-1 \end{aligned}\right|$$

41. $$\left.\begin{aligned} \tfrac{7}{9}x+\tfrac{5}{6}y&=38\\ \tfrac{5}{6}x+\tfrac{3}{4}y&=39 \end{aligned}\right|$$

42. $$\left.\begin{aligned} \frac{x+7}{3}+\frac{y-5}{2}&=8\\ \frac{x+7}{3}-\frac{y+5}{2}&=-7 \end{aligned}\right|$$

43. $$\left.\begin{aligned} \frac{5x+3}{2}-\frac{y+6}{3}&=x-\frac{1}{2}\\ \frac{5x-4}{3}-\frac{y+1}{2}&=y-\frac{11}{6} \end{aligned}\right|$$

44. $$\left.\begin{aligned} x+y&=a\\ x-y&=b \end{aligned}\right|$$

45. $$\left.\begin{aligned} x+y&=3a+5b\\ x-y&=a+3b \end{aligned}\right|$$

46. $$\left.\begin{aligned} mx+y&=a\\ nx-y&=b \end{aligned}\right|$$

47. $$\left.\begin{aligned} \frac{x}{b}+y&=a+b\\ \frac{x}{a}-y&=0 \end{aligned}\right|$$

48. $$\left.\begin{aligned} x+y&=m+n\\ mx+ny&=m^2+n^2 \end{aligned}\right|$$

49. $$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a}-\frac{y}{b}&=0\\ bx+ay&=6ab \end{aligned}\right|$$

50. $$\left.\begin{aligned} x&=\frac{y+a}{3}-\frac{a}{2}\\ y&=\frac{x+b}{3}-\frac{b}{2} \end{aligned}\right|$$

Sistema de tres ecuaciones simultáneas de primer grado con tres incógnitas.

Resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 4x+3y+2z&=16\\ 7x+4y+6z&=33\\ 5x+5y-3z&=6 \end{aligned}\right|\begin{aligned} &\cdot 3\\ &\\ &\cdot 2 \end{aligned}$$

Se elige en primer lugar una incógnita para eliminar. Sea z. Se elimina z en las dos primeras ecuaciones por reducción y del mismo modo se elimina en las dos últimas ecuaciones. Resulta así el sistema

$$\left.\begin{aligned} x+y&=3\\ 17x+14y&=45 \end{aligned}\right|$$

del cual se obtiene $x=1$ e $y=2$.

Sustituyendo estos valores en alguna de las ecuaciones propuestas se obtiene $z=3$.

Resolver los sistemas:

51. $$\left.\begin{aligned} 2x+3y+z&=13\\ 4x-2y-z&=7\\ 5x+4y+z&=24 \end{aligned}\right|$$

52. $$\left.\begin{aligned} 5x-3y-2z&=23\\ 7x-4y-6z&=29\\ 2x+3y-8z&=2 \end{aligned}\right|$$

53. $$\left.\begin{aligned} x+5y-7z&=24\\ x+4y-6z&=20\\ x+3y-5z&=16 \end{aligned}\right|$$

54. $\left.\begin{aligned} 3x+y+5z &= 50 \\ 5x-y+7z &= 30 \\ 11x+y-2z &= 130 \end{aligned}\right|$

55. $\left.\begin{aligned} x+y &= 5 \\ y+z &= 8 \\ x+z &= 7 \end{aligned}\right|$

56. $\left.\begin{aligned} 3x+2y &= -7 \\ 5z+3x &= -18 \\ 5y+2z &= -16 \end{aligned}\right|$

57. $\left.\begin{aligned} x-y &= z-4 \\ y-z &= x-6 \\ z-x &= y-8 \end{aligned}\right|$

58. $\left.\begin{aligned} x+y+z &= 32 \\ 3x-5y &= 20 \\ 7z-2x &= 120 \end{aligned}\right|$

59. $\left.\begin{aligned} \frac{x}{3}+\frac{y}{2}-z &= -2 \\ \frac{x}{5}+\frac{y}{3}+z &= 15 \\ \frac{x}{15}-\frac{y}{6}-z &= -10 \end{aligned}\right|$

60. $\left.\begin{aligned} x+\frac{y}{a}+\frac{z}{b} &= 5a+4b \\ x+\frac{y}{b}+\frac{z}{a} &= 4a+5b \\ y+z &= 7ab \end{aligned}\right|$

Problemas.

1. La suma de dos números es 84 y su diferencia 16. ¿Cuáles son los números?

2. Si al triple de un número se le suma el doble de otro, resulta 95. Si al doble del primero se resta el segundo, resulta 40. ¿Cuáles son los números?

3. 12 kg de té y 15 kg de café se venden en E° 132; a los mismos precios, 9 kg de té y 20 kg de café valen E° 134. ¿Cuánto vale el kg de cada especie?

4. En un triángulo, la diferencia entre los ángulos α y β es 20° y la diferencia entre γ y β es 10°. Calcularlos.

5. Un barco recorre la distancia de 75 km contra la corriente de un río en 5 horas y a favor de la corriente en 3 horas. ¿Cuál es la velocidad del barco y la velocidad de las aguas?

6. Determinar tres números sabiendo que las sumas de ellos, considerados de dos en dos son, respectivamente, 18, 24 y 26.

7. La suma de dos números es 200. Dividiendo el primero por 12 y el segundo por 10, la suma de sus cuocientes es 18. ¿Cuáles son los números?

8. Dos números suman 66. Dividiéndolos, el cuociente es 5 y el resto es 6. ¿Cuáles son los números?

9. El cuociente de dos números es 3 y el resto 15. ¿Cuáles son estos números si su diferencia es 85?

10. Dividiendo la suma de dos números por su diferencia resulta 3 como cuociente y 6 de resto. El doble del primer número más el triple del segundo es 64. ¿Cuáles son estos números?

11. La suma de las dos cifras de un número es 10. Invirtiendo las cifras se obtiene otro número que es mayor en 36 unidades al primero. ¿Cuál es el número?

12. La suma de las dos cifras de un número es 6. Invirtiendo el orden de las cifras se obtiene otro número que restado del primero da 18. ¿Cuál es el número?

13. La suma de las cifras de un número de tres cifras es 15. Las centenas tienen 2 unidades más que las decenas. Permutando centenas con unidades se obtiene un número menor en 396 al primero. ¿Cuál es el número?

14. El perímetro de un triángulo isósceles es 58 m. La base mide 4 m más que cada uno de los lados iguales. Calcular los lados.

15. El perímetro de un rectángulo es 88 m y la diferencia de dos lados contiguos es 20 m. Calcular su área.

16. En un trapecio la mediana mide 37 cm y la diferencia de las bases es 14 cm. Calcular las bases.

17. Si se aumenta un lado de un rectángulo en 5 m y el otro en 10 m el área aumenta en 400 m^2 y si el primer lado se disminuye en 5 m y el otro en 20 m el área disminuye en 400 m^2. Calcular sus lados.

18. El perímetro de un dibujo rectangular es 48 cm. Si el largo se disminuye en 3 cm y el ancho se aumenta en 3 cm la superficie aumenta en 9 cm^2. Calcular las dimensiones del rectángulo.

CAPITULO VII

PROPORCIONES.

46. Razón.—Dos cantidades homogéneas se pueden comparar averiguando cuántas veces la segunda, tomada como unidad, está contenida en la primera. El cuociente entre estas dos cantidades de la misma especie se llama *razón*.

Razón geométrica o simplemente razón, es el cuociente entre dos cantidades homogéneas.

La razón entre 12 y 4 se anota 12 : 4 y también:

$$\frac{12}{4} \text{ y se lee 12 es a 4.}$$

La razón entre a y b es: a: b o $\frac{a}{b}$ y se lee a es a b.

Las dos cantidades que se comparan son los *términos* de la razón. El primer término se llama *antecedente* y el segundo *consecuente;* el cuociente es el valor de la razón.

Una razón es un número abstracto, puesto que indica el número de veces que el consecuente está contenido en el antecedente.

Una razón se identifica con un cuociente y una fracción; el antecedente corresponde al dividendo y al numerador y el consecuente al divisor y al denominador. De donde se deduce que

El antecedente es igual al producto del consecuente por la razón.

Si el valor de la razón entre a y b se designa por q, se tiene:

$$a = bq.$$

47. Propiedades de una razón.—De la definición resultan las propiedades siguientes de una razón:

1.ª *Para hacer mayor n veces una razón se multiplica su antecedente o se divide su consecuente por n.*

2.ª *Para hacer menor n veces una razón se multiplica su consecuente o se divide su antecedente por n.*

3.ª *El valor de una razón no altera cuando sus dos términos se multiplican o se dividen por un mismo número.* En el primer caso se *amplifica* la razón y en el segundo se *simplifica.*

La amplificación de una razón permite transformar una razón de términos fraccionarios en otra de términos enteros.

Sea la razón $\frac{7}{8} : \frac{5}{6}$.

Amplificando esta razón por 24, que es el mínimo común múltiplo de los denominadores, resulta la razón 21 : 20.

48. Razón directa y razón inversa.—Para determinar la razón entre dos cantidades es necesario fijar el orden en que se han de nombrar.

La razón entre 12 y 4 no es igual a la razón entre 4 y 12.

Si en la razón a : b se invierte el orden de los términos, resulta la razón b : a.

La primera es la razón *directa* entre *a* y *b* y la segunda es la razón *inversa.*

El producto de la razón directa de dos números por su razón inversa, es igual a la unidad.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Ejercicios.

1. Expresar la razón entre 3 y 5, entre 8 y 7, entre m y n, entre x e y.

2. Leer las razones siguientes y calcular su valor:

a)	18 : 3	36 : 9
b)	E° 28 : E° 7	35 m : 5 m
c)	45 kg : 15 kg	60 hl : 20 hl
d)	$2\frac{1}{4} : 3$	$3\frac{2}{3} : 11$
e)	$\frac{1}{3} : \frac{1}{6}$	$\frac{2}{7} : \frac{2}{5}$
f)	2 cm : 5 cm	1 g : 4 g
g)	E° 8 : 90 ctmos.	16 m : 80 cm
h)	$\frac{9}{10} : \frac{24}{25}$	$4\frac{3}{4} : 7\frac{1}{8}$
i)	$\frac{a}{b} : \frac{x}{y}$	0,91 : 0,7.

3. El consecuente de una razón es 6, 15, 19, $ 16, 18 m y su valor respectivo es 10, 9, 13, 14, 20. Calcular el antecedente.

4. Simplificar las razones siguientes:

a) $15 : 25$ $\quad 27 : 36$ $\quad 48 : 72$

b) $\frac{a^2b}{ax}$ $\quad \frac{m^2n}{mn^2}$ $\quad \frac{42a}{14a^2}$

c) $\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}$ $\quad \frac{45x^2z}{75xy^2}$ $\quad \frac{108x^3y^2}{135x^2y^3}$

5. Reducir a términos enteros las razones siguientes:

a) $\frac{3}{4} : \frac{2}{3}$ $\quad \frac{5}{9} : \frac{2}{3}$ $\quad \frac{5}{6} : \frac{7}{12}$

b) $\frac{m}{n} : \frac{p}{q}$ $\quad \frac{a}{x^2} : \frac{b}{x}$ $\quad \frac{c}{b} : \frac{d}{bc}$

c) $\frac{7}{12} : \frac{8}{15}$ $\quad \frac{9}{20} : \frac{11}{30}$ $\quad \frac{17}{24} : \frac{19}{40}$

6. Dada una razón, expresar la razón inversa.

49. Proporción.

Las razones $12 : 4=3$
y $15 : 5=3$

tienen el mismo valor, luego son iguales y resulta la igualdad:

$$12 : 4=15 : 5$$

$$\text{o} \quad \frac{12}{4} = \frac{15}{5}$$

que se lee 12 es a 4 como 15 es a 5.

Esta igualdad de dos razones es una *proporción*. *Proporción es la igualdad de dos razones.*

El antecedente de la *primera razón* con el consecuente de la *segunda razón* se llaman términos *extremos* de la proporción y el consecuente de la primera razón con el antecedente de la segunda se llaman *medios*. Según el orden, el primer término con el cuarto son los extremos y el segundo con el tercero son los medios.

Dada una razón, se completa la proporción por uno de los procedimientos siguientes:

1.° Atendiendo al valor de la razón; por ejemplo se da la razón 18 : 6. El valor de esta razón es 3. La segunda razón debe tener el mismo valor, por ejemplo: 15 : 5. La proporción es $18 : 6=15 : 5$.

2.° Simplificando la razón dada. Si la razón dada es 24 : 36, la segunda razón será 2 : 3 y la proporción, $24 : 36=2 : 3$.

3.° Amplificando la razón dada. Si la razón dada es 4 : 5, la segunda se obtiene amplificando por ejemplo, por 2 y resulta la proporción $4 : 5 = 8 : 10$.

50. Teoremas sobre las proporciones.

Si en la proporción $\frac{12}{3} = \frac{20}{5}$ se multiplican los dos miembros por el producto de los consecuentes resulta la igualdad:

$$12 . 5=20 . 3$$

Haciendo el mismo cálculo en la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ resulta:

$$\frac{abd}{b} = \frac{bcd}{d}$$

Simplificando: ad = bc; luego

Teorema I.—*En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.*

Este teorema sirve para comprobar la exactitud de una proporción.

La igualdad *ad* = *bc* no altera, si se dividen los dos miembros por *bd* y resulta:

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$$

Simplificando se obtiene:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \text{ luego}$$

Teorema II.—(Recíproco).—*La igualdad de dos productos es igual a una proporción, cuyos términos extremos son los factores de uno de los productos y los medios son los factores del otro producto.*

De la igualdad ad = bc resultan las ocho proporciones siguientes:

$$\begin{aligned} a : b &= c : d \\ a : c &= b : d \\ b : a &= d : c \\ b : d &= a : c \\ c : d &= a : b \\ c : a &= d : b \\ d : b &= c : a \\ d : c &= b : a \end{aligned}$$

que son idénticas, porque en cada una de ellas se verifica que el mismo producto de extremos es igual al mismo producto de medios. De aquí el:

Teorema III.—*Una proporción no altera: 1.° cambiando el orden de los medios o de los extremos* (**alternar una proporción**); 2.° *cambiando el orden de los términos de cada razón* (**invertir una proporción**); 3.° *cambiando el orden de las razones* (**permutar una proporción**).

Si a cada razón de la proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

se agrega la unidad, resulta sucesivamente:

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{c}{d} + \frac{d}{d}$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

Análogamente, restando la unidad de cada razón, resulta:

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{a-d}{d}; \text{ luego}$$

Teorema IV.—*En toda proporción la suma o diferencia de los términos de la primera razón es a su consecuente* (o a su antecedente) *como la suma o diferencia de los términos de la segunda razón es a su consecuente* (o a su antecedente).

Comparar la suma de los términos de cada razón con su antecedente o consecuente, es *componer* la proporción. Comparar la diferencia de los dos términos de cada razón con su antecedente o consecuente es *descomponer* la proporción.

Corolario.—*En una proporción la suma de los términos de la primera razón es a su diferencia como la suma de los términos de la segunda razón es a su diferencia.*

En efecto, de la proporción:

$$a : b = c : d$$

resulta sucesivamente:

$$\begin{array}{l} (a+b) : b = (c+d) : d \\ \underline{(a-b) : b = (c-d) : d} \\ (a+b) : (c+d) = b : d \\ \underline{(a-b) : (c-d) = b : d} \\ (a+b) : (c+d) = (a-b) : (c-d) \\ (a+b) : (a-b) = (c+d) : (c-d) \end{array}$$

Esta comparación se llama *componer y descomponer* una proporción.

Una proporción que tiene sus términos desiguales se llama *discontinua.*

$$20 : 5 = 12 : 3$$

es una proporción discontinua. Cada término de una proporción discontinua se llama *cuarta proporcional geométrica.*

Problema 1: *Calcular una cuarta proporcional geométrica entre tres cantidades.*

Sean 24, 18 y 40 las tres cantidades y x la cuarta proporcional.

Una de las proporciones que se pueden formar es:

$$24 : 18 = 40 : x.$$

De donde resulta:

$$24x = 18 \cdot 40$$

$$x = \frac{18 \cdot 40}{24} = 30.$$

Otra proporción es:

$$24 : x = 18 : 40.$$

De donde resulta:

$$18x = 24 \cdot 40.$$

$$x = \frac{24 \cdot 40}{18} = 53\tfrac{1}{3}.$$

De la primera proporción se deduce:

En una proporción un extremo es igual al producto de los medios divididos por el otro extremo.

De la segunda proporción se deduce:

En una proporción un medio es igual al producto de los extremos dividido por el otro medio.

Una proporción que tiene sus términos medios iguales entre sí se llama *continua;* por ejemplo $108 : 36 = 36 : 12$.

El término medio de una proporción continua se llama *media proporcional geométrica o medio geométrico*, y cada uno de los términos desiguales se llama *tercera proporcional geométrica*.

Problema 2. *Calcular la tercera proporcional geométrica entre dos cantidades.*

Sean a y b estas cantidades y x la tercera proporcional. Se forma la proporción $a : b = b : x$, de donde resulta:

$$ax = b^2$$

$$x = \frac{b^2}{a}.$$

La tercera proporcional geométrica entre dos cantidades es igual al cuadrado del término medio dividido por el extremo conocido.

Problema 3. *Calcular la media proporcional geométrica entre dos cantidades, a y b.*

Designando por x la media proporcional, se forma la proporción:

$$a : x = x : b.$$

De donde: $x^2 = ab.$

El valor de x se escribe $x = \sqrt{ab}$ y se lee x igual a raíz cuadrada de ab, lo que significa que se trata de buscar un número que, multiplicado por sí mismo, sea igual a ab.

La media proporcional geométrica entre dos cantidades es igual a la raíz cuadrada del producto de estas cantidades.

Por ahora, el cálculo de la raíz cuadrada de un número se reduce a descomponer el número en dos factores iguales. Este factor es la raíz cuadrada del número.

Amplificando por m las dos razones de la proporción:

$$a : b = c : d$$

resulta la proporción:

$$am : bm = cm : dm \qquad \text{(a)}$$

que es idéntica a la anterior, porque las razones conservan su valor.

Amplificando por m la primera razón y por n la segunda razón de la misma proporción, resulta:

$$am : bm = cn : dn. \qquad \text{(b)}$$

Alternando los medios de esta proporción resulta:

$$am : cn = bm : dn. \qquad \text{(c)}$$

Al mismo resultado se llega simplificando las razones; luego

Teorema V. *Una proporción no altera:*

a) *Multiplicando o dividiendo sus términos por un mismo número;*

b) *Multiplicando o dividiendo los términos de la primera razón por un número y los términos de la segunda razón por otro;*

c) *Multiplicando o dividiendo los antecedentes por un número y los consecuentes por otro.*

Formando el producto de extremos y medios en las dos proporciones:

$$a : b = c : d$$
$$m : n = p : q$$

resulta:

$$ad = bc$$
$$mq = np$$

Multiplicando miembro a miembro las dos igualdades se obtiene:

$$am \,.\, dq = bn \,.\, cp.$$

Según el teorema II de este capítulo, se forma la proporción:

$$am : bn = cp : dq.$$

Si las mismas igualdades:

$$\begin{aligned} ad &= bc \\ mq &= np \end{aligned}$$

se dividen miembro a miembro, se obtiene:

$$\frac{ad}{mq} = \frac{bc}{np}$$

lo que se puede escribir:

$$\frac{a}{m} \cdot \frac{d}{q} = \frac{b}{n} \cdot \frac{c}{p}.$$

De donde, según teorema II, resulta:

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{c}{p} : \frac{d}{q}; \text{ luego}$$

Teorema VI. *Dos* (o más) *proporciones se convierten en una nueva proporción, si se multiplican o dividen sus términos homólogos.*

51. Serie de razones iguales (serie de proporciones).

Tres o más razones iguales forman una *serie de razones iguales* (serie de proporciones).

$$12 : 4 = 15 : 5 = 18 : 6 = 21 : 7$$

es una serie de razones iguales, que también se escribe así:

$$12 : 15 : 18 : 21 = 4 : 5 : 6 : 7$$

Escritura en la cual el signo = no indica igualdad, sino separación entre los antecedentes y los respectivos consecuentes.

Sea la serie: $a : b = c : d = e : f$

Designando por q el valor de las razones, se tiene:

$$\begin{aligned} a &= bq \\ c &= dq \\ e &= fq. \\ \hline a+c+e &= bq+dq+fq \\ &= q(b+d+f). \end{aligned}$$

Dividiendo los dos miembros por $b+d+f$, resulta:

$$\frac{a+c+e}{b+d+f} = q = \frac{a}{b}; \text{ luego}$$

Teorema VII.—*En una serie de proporciones la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como un antecedente cualquiera es a su consecuente respectivo.*

Problema. *Convertir un sistema de proporciones en una serie de proporciones.*

Sea el sistema:

$$\begin{aligned} a &: b = 2 : 3 \\ c &: d = 4 : 5 \\ e &: f = 6 : 7. \end{aligned}$$

Se amplifica la primera razón de la primera proporción por el producto de los antecedentes de las demás primeras razones y resulta $ace : bce$.

Se hace el antecedente de la primera razón de la segunda proporción igual a bce; para que la razón no altere hay que multiplicar el consecuente por be, puesto que su antecedente ha sido multiplicado por be y la razón se convierte en *bce* : *bde*. Para que el antecedente de la primera razón de la tercera proporción sea bde, se amplifica la razón por bd y se tiene *bde : bdf*.

Como el antecedente de cada nueva razón es igual al consecuente de la anterior, se escribe:

$$ace : bce : bde : bdf.$$

Repitiendo el procedimiento en las segundas razones, resulta:

$$\mathbf{2} . 4 . 6 : \mathbf{3} . 4 . 6 : \mathbf{5} . 3 . 6 : \mathbf{7} . 3 . 5$$
$$ace : bce : bde : bdf = 16 : 24 : 30 : 35.$$

52. Cantidades proporcionales e inversamente proporcionales.

Dos cantidades son *directamente proporcionales* o simplemente *proporcionales* cuando haciéndose mayor o menor una de ellas, la otra se hace mayor o menor el mismo número de veces.

Ejemplos: El precio de un terreno es proporcional a su superficie.

El peso de una substancia es proporcional a su volumen.

El salario de un obrero es proporcional a su trabajo, etc.

Cuando dos cantidades variables son proporcionales, *la razón entre dos valores de la primera es siempre igual a la razón directa entre dos valores correspondientes de la segunda.*

Según esto, la proporcionalidad de dos cantidades se expresa por una proporción, como se puede notar en el siguiente

Problema. *Si 18 m de género valen* E° 21,60, *¿cuánto valen 24 m del mismo género?*

Sea x el valor de los 24 m.

Como el número de metros de género es proporcional a su valor, se puede formar la proporción:

$$18 : 24 = 21{,}60 : x.$$

De donde:

$$x = \frac{24 \cdot 21{,}60}{18} = \text{E° } 28{,}80.$$

Dos cantidades son *inversamente* proporcionales, cuando haciéndose mayor o menor la primera, la segunda se hace menor o mayor el mismo número de veces. Si una cantidad se duplica la otra se reduce a la mitad y viceversa.

Ejemplos: El número de trabajadores es inversamente proporcional al tiempo necesario para concluir un trabajo. Si 12 trabajadores concluyen una obra en 7 días, 4 trabajadores, en iguales condiciones, la concluirán en 21 días.

El tiempo en que se recorre una distancia en movimiento uniforme está en razón inversa de la velocidad del movimiento.

El capital está en razón inversa del tiempo necesario para producir cierto interés.

En dos cantidades inversamente proporcionales, la razón de dos valores de una de ellas es igual a la razón inversa de dos valores correspondientes de la otra.

Problema. *Si 15 trabajadores de igual actividad hacen una obra en 32 días, ¿en cuántos días habrían hecho esta obra 20 trabajadores?*

Sea x el número de días en que 20 trabajadores hacen la obra. Es evidente que si se aumenta el número de trabajadores, se concluye la obra en menos tiempo, es decir, el número de trabajadores es inversamente proporcional al número de días necesarios para concluir el trabajo; luego se forma la proporción:

$$15 : 20 = x : 32$$

De donde:

$$x = \frac{15 \cdot 32}{20} = 24 \text{ días.}$$

Ejercicios.

1. Formar una proporción, cuyas razones valgan: a) 3; b) 4; c) 5; d) 6.

2. Completar la proporción, cuya primera razón sea: a) $36 : 12$; b) $60 : 48$; c) $9 : 8$; d) $f : g$.

3. Formar las ocho proporciones que resultan de cada una de las igualdades:

a) $16 \cdot 3 = 12 \cdot 4$; b) $15 \cdot 4 = 12 \cdot 5$;
c) $ax = by$; d) $5a = 7b$.

4. Componer las proporciones:
a) $84 : 28 = 75 : 25$; b) $r : s = p : q$.

5. Descomponer las proporciones:
a) $96 : 24 = 60 : 15$; b) $\alpha : \beta = \gamma : \delta$.

6. Componer y descomponer las proporciones:
a) $54 : 18 = 36 : 12$; b) $v : x = y : z$.

7. Transformar las proporciones siguientes, de modo que x figure en un solo término:

a) $x : (10-x) = 2 : 3$; b) $(10+x) : x = 3 : 2$;
c) $(a-x) : x = (b-c) : c$; d) $(x-a) : x = 5 : 6$;
e) $(12+x) : (12-x) = 2 : 1$; f) $(x-a) : (x+a) = 3 : 5$.

g) $\dfrac{a+b+x}{a+b-x} = \dfrac{7}{3}$; h) $\dfrac{x-p-q}{x+p+q} = \dfrac{a+b}{a-b}$.

8. Calcular el valor de x en las proporciones siguientes:

a) $15 : x = 12 : 20$; $45 : 20 = 36 : x$;
b) $26 : 65 = x : 5$; $x : 2{,}4 = 3 : 1{,}8$;
c) $7{,}4 : x = 3{,}7 : 0{,}5$; $x : 5\frac{1}{4} = 5\frac{3}{5} : 3\frac{4}{15}$;
d) $\frac{3}{4} : x = 2\frac{1}{2} : 3\frac{1}{3}$; $x : 8 = 2\frac{1}{4} : 1\frac{4}{5}$;
e) $\frac{2}{3} : \frac{5}{6} = x : 2\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}a^2b : \frac{1}{2}ac = 1\frac{1}{2}b^2 : x$.

9. Calcular el valor de x, transformando primero la proporción como en el ejercicio 7:

a) $x : (x-6) = 24 : 16$; $(12+x) : x = 18 : 10$;
b) $(x+12) : (x-12) = 40 : 10$;
$(x+8) : 86 = (x-8) : 54$;
c) $(x+15) : 24 = (60-x) : 16$;
$(x+a) : (x-a) = m : n$.

10. Calcular una cuarta proporcional entre:
a) 6, 8 y 9; b) 14, 18 y 21; c) 8, $3\frac{1}{5}$ y $7\frac{1}{2}$.

11. Calcular la tercera proporcional entre
a) 135 y 45; $8ab^2$ y $4ab^2$.

12. Calcular la media proporcional geométrica entre:
a) 2 y 18; b) 9 y 16; c) 18 y 50.

13. Dividir los números siguientes en dos partes que estén en la razón que se indica:

a) 75; 2 : 3; b) 98; 3 : 4; c) 240; 3 : 5.

14. Convertir las proporciones siguientes en otras de términos enteros y en su forma más sencilla:

a) $\frac{3}{8} : 3 = \frac{5}{8} : x;$ b) $6 : \frac{4}{5} = 8 : \frac{2}{5}x;$

c) $\frac{8}{9} : \frac{5}{6} = \frac{4}{9} : x;$ d) $\frac{7}{12} : \frac{5}{6} = \frac{14}{15} : \frac{3}{5}x;$

e) $\frac{5}{9} : \frac{7}{12} = \frac{5}{6} : \frac{3}{4}x;$ f) $4\frac{1}{6} : 5\frac{5}{8} = 6\frac{2}{3} : 1\frac{1}{2}x;$

g) $\frac{3}{2ab} : \frac{5}{4x} = \frac{6}{ab} : \frac{5}{8};$ h) $\frac{6}{a+b} : \frac{2}{a-b} = \frac{4}{a^2-b^2} : x.$

Calcular el valor de x en las proporciones anteriores.

15. Formar una proporción con las proporciones:

a) $24 : 15 = 32 : 20$ y $\frac{5}{6} : \frac{2}{3} = \frac{3}{4} : \frac{3}{5}x;$

b) $60 : 48 = 25 : 20$ y $1\frac{1}{11} : 3\frac{1}{5} = 2\frac{1}{2} : 3\frac{1}{3}x.$

16. Anotar las razones en la serie:

$a : b : c : d = 8 : 15 : 20 : 24.$

17. Calcular x, y, z en las siguientes series:

a) $x : y : z = 3 : 4 : 5,$ si $x+y+z=48;$

b) $x : y : z = 8 : 5 : 2,$ si $2x+y+5z=93;$

c) $x : y : z = 4 : 7 : 10,$ si $x+y-z=5.$

18. Calcular x, y, z, u, en las series:

a) $x : y : z : u = 12 : 15 : 18 : 20,$ si $x+y+z+u=195;$

b) $x : y : z : u = 3 : 5 : 7 : 9,$ si $x+y+z-u=24;$

c) $x : y : z : u = 5 : 4 : 6 : 2,$ si $6x+5y-4z-5u=144.$

19. Convertir en serie de proporciones los siguientes sistemas de proporciones:

a) $\begin{array}{l} a : b = 2 : 3 \\ b : c = 5 : 6 \end{array}$ b) $\begin{array}{l} a : b = 15 : 16 \\ b : c = 10 : 9 \end{array}$

c) $\begin{array}{l} a : b = 2 : 3 \\ b : c = 5 : 6 \\ c : d = 9 : 8 \end{array}$ d) $\begin{array}{l} a : b = 4 : 5 \\ b : c = 3 : 10 \\ c : d = 1 : 8 \end{array}$

e) $\begin{array}{l} a : b = 6 : 7 \\ a : c = 8 : 9 \\ a : d = 12 : 13 \end{array}$ f) $\begin{array}{l} a : c = 3 : 5 \\ b : d = 7 : 8 \\ c : d = 15 : 16. \end{array}$

20. Los tres primeros términos de una proporción son 84, 35 y 48. Calcular el cuarto.

21. Los dos primeros términos de una proporción continua son 288 y 48. Calcular el cuarto término.

22. La suma de dos números es 180 y están en la razón 7 : 5. Calcular los números.

23. La diferencia de dos números es 48 y están en la razón de 9 : 5. Calcular los números.

24. Buscar la razón igual a $\frac{2}{3}$ y que la suma de sus términos sea 90.

25. Buscar la razón igual a $\frac{7}{9}$ y que la diferencia de sus términos sea 8.

26. Dos personas se reparten E° 4 200, de modo que sus partes estén en la razón de 3 : 4. ¿Cuánto recibe cada una?

27. El dinero de dos personas está en la razón de 12 : 7 y una de ellas tiene E° 85 más que la otra. ¿Cuántos escudos tiene cada una?

28. Repartir E° 72 000 entre tres personas, de modo que las partes sean entre sí como 5 : 6 : 7. ¿Cuánto corresponde a cada persona?

29. ¿Qué altura tiene un árbol que da una sombra de 22 m sobre una superficie horizontal, si al mismo tiempo la sombra de una varilla de 1,5 m, colocada verticalmente, es de 0,6 m?

30. Las velocidades de dos vehículos están en la razón de 7 : 5. Si el primero demora 1 hora 24 minutos en recorrer una distancia, ¿qué tiempo demorará el segundo para recorrer la misma distancia?

31. A, B y C compran un boleto de E° 5 de una lotería. A dio E° 1, B E° 1,50 y C E° 2,50. Obtuvieron un premio de E° 400. ¿Cuánto corresponde a cada uno deduciendo 2% de comisión al agente?

32. ¿Cuánto hay que pagar en dinero por E° 964 en bonos del Estado, que se cotizan con $4\frac{1}{2}$% de descuento? ¿Cuántos de estos bonos se compran con E° 171,90?

33. Un comerciante compra 4 piezas de género de 24 m cada una a E° 2,50 el metro. Calcular el valor al contado con 15% de descuento.

34. 24 trabajadores hacen una obra en dos meses 20 días, trabajando 9 horas al día. ¿En qué tiempo habrían concluido esta obra 36 trabajadores, trabajando en las mismas condiciones, 10 horas diarias?

35. En la fabricación de la pólvora para romper rocas, el carbón y el salitre están en la razón de 16 : 5 y el salitre con el azufre en la razón de 10 : 3. ¿Cuántos kilogramos de carbón, de salitre y de azufre entran en 5 940 kg de pólvora?

36. Repartir E° 18 450 entre A, B, C y D, de modo que las partes de A y B estén en la razón de 3 : 5; las partes de B y C en la razón 4 : 7, y las de C y D en la razón de 5 : 8. ¿Cuánto recibe cada persona?

53. Ecuaciones en forma de una proporción.

a) $(x-3) : (x-2) = (x-6) : (x-4)$.

Se forma el producto de los extremos y de los medios:

$$(x-3) \cdot (x-4) = (x-2) \cdot (x-6)$$

De donde: $x^2-7x+12=x^2-8x+12$

$$x=0$$

b) $$\frac{x+1}{x-1} = \frac{a+b}{a-b}.$$

Se sigue el mismo procedimiento de la ecuación a), pero es preferible el siguiente:

Componiendo y descomponiendo la proporción resulta:

$$\frac{2x}{2} = \frac{2a}{2b}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{a}{b}$$

$$x = \frac{a}{b}.$$

Ejercicios.

1. $(4x+1) : (2x+3) = 9 : 5$.
2. $(5x+1) : (7x-5) = 7 : 9$.
3. $(9-7x) : 20 = (13-5x) : 11$.
4. $(25x-17) : (17x-25) = 11 : 7$.
5. $(11x+2) : (17x-6) = 9 : 13$.
6. $(9x+5) : (11x+5) = 14 : 17$.
7. $(3x-7) : (4x+2) = (3x-14) : (4x-13)$.

8. $\dfrac{2x+1}{51} = \dfrac{3x-1}{18}$.   9. $\dfrac{30}{3x+1} = \dfrac{15}{2x-1}$.

10. $\dfrac{x+3}{2x-1} = \dfrac{x+7}{2x+5}$.   11. $\dfrac{3x+1}{6x-5} = \dfrac{2x-8}{4x-25}$.

12. $\dfrac{(x+2)\ (3x-4)}{x(15x+2)} = \dfrac{1}{5}$.

13. $\dfrac{(2x+5)\ (3x-4)}{(4x-1)\ (5x+7)} = \dfrac{3}{10}$.

14. $\dfrac{(8-9x)\ (3-5x)}{(3x+4)\ (2x-5)} = \dfrac{15}{2}$.

15. $\dfrac{(7x-5)\ (6x+7)}{(8x-9)\ (7x+12)} = \dfrac{3}{4}$.

16. $\dfrac{3x^2+4x+5}{6x^2+7x+8} = \dfrac{1}{2}$.

17. $\dfrac{(3x+1)\ (2x+7)}{(5x-2)\ (3x+14)} = \dfrac{2}{5}$.

18. $\dfrac{a-x}{b} = \dfrac{x+b}{a}$.   19. $\dfrac{a}{a-x} = \dfrac{b}{b-x}$.

20. $\dfrac{x+m}{x-m} = \dfrac{5}{4}$.   21. $\dfrac{a+x}{m+a} = \dfrac{a-x}{m-a}$.

22. $\dfrac{a-x}{b-x} = \dfrac{a+x}{b+x}$.   23. $\dfrac{x+2a-4b}{x-2a+4b} = \dfrac{1}{3}$.

24. $\dfrac{4x^2+ax-b}{6x^2+bx-a} = \dfrac{2}{3}$.   25. $\dfrac{ax^2-3x+5}{mx^2-5x+3} = \dfrac{a}{m}$.

---

26. Dividir un trazo de 20 cm en dos segmentos que estén en la razón de 3 : 2. ¿Cuál es la longitud de cada segmento?

27. La diferencia entre los lados contiguos de un rectángulo es 4 m y están en la razón de 5 : 6. Calcular los lados.

28. Calcular los lados de un rectángulo de 54 m de perímetro, sabiendo que están en la razón de 5 : 4.

29. El ángulo exterior de la base de un triángulo isósceles y el exterior del vértice están en la razón de 11 : 14. ¿Cuántos grados miden los ángulos del triángulo?

30. Los ángulos que la bisectriz del ángulo recto de un triángulo rectángulo forma con la hipotenusa están en la razón de 3 : 2. ¿Cuánto miden los ángulos del triángulo?

31. Los ángulos de un triángulo son entre sí como 2 : 6 : 7. Calcular los ángulos.

32. Las edades de dos personas están en la razón de 4 : 5, y una tiene 6 años más que la otra. ¿Cuál es la edad de cada una?

33. Las edades de dos hermanos son entre sí como 5 : 4. Hace 9 años la edad del mayor era el doble de la del menor. Calcular las edades.

34. Los precios de dos libros son entre sí como $2\frac{1}{2} : 3\frac{1}{2}$. ¿Cuál es el precio de cada uno, si un libro vale E° 3 menos que el otro?

35. Dividir 999 en tres partes que sean entre sí como 15 : 13 : 9.

36. De dos lugares que distan 106 km entre sí, parten dos ciclistas uno al encuentro del otro, con velocidades que son entre sí como $4 : 3\frac{1}{2}$ y se encuentran 4 horas después de partir el primero. ¿Cuántos kilómetros recorrió cada uno, si el segundo parte una hora después del primero?

37. De dos lugares que distan 65 km entre sí, parten a las 7 A. M. dos viajeros con velocidades que son entre sí como 5,2 : 4,8. ¿A qué hora se encontrarán, si el primero necesita $12\frac{1}{2}$ horas para recorrer toda la distancia que separa los dos lugares?

38. Un diamante que pesa 1,18 gramos, vale E° 24. ¿Cuánto vale un diamante de la misma forma y pureza que pesa 2,36 gramos, sabiendo que el precio de un diamante es proporcional al cuadrado de su peso?

39. El peso de una esfera es proporcional al volumen y el volumen al cubo del diámetro. Calcular el peso de una esfera de 24 cm de diámetro, si otra de la misma substancia de 8 cm de diámetro, pesa 4 kg.

EJERCICIOS DE RECAPITULACION

Descomponer en factores:

1. $ab+3a+2b+6$.
2. $ab-2a-5b+10$.
3. $2ab+2a-b-1$.
4. $10xy+15x-4y-6$.
5. $xy+4y+5x+20$.
6. $ab-2a-8b+16$.
7. $3x^2-3bx+xy-by$.
8. $3ax^2-3bxy+2axy-2by^2$.
9. $6ab+4a-15b-10$.
10. $mpqx-mnx+npq-n^2$.
11. $x^2y^2-x^2+3y^2-3$.
12. $a^2c+abd+2a+abc+b^2d+2b$.

Descomponer en factores:

13. a^4-9.
14. $(a+b)^2-1$.
15. $1-(x+y)^2$.
16. $1-(x-y)^2$.
17. $(a-b)^2-(c-d)^2$.
18. $4(c-d)^2-9(c+d)^2$.
19. $a^2+2ab+b^2-c^2$.
20. $x^2-2xy+y^2-z^2$.
21. $1-x^2-2xy-y^2$.
22. $a^2-b^2+2bc-c^2$.
23. $n^2-q^2+m^2+2mn$.
24. $a^2+b^2-c^2-d^2+2ab-2cd$

Descomponer en producto:

25. $2a^2+3a+1$.
26. $6a^2+7a-5$.
27. $3x^2+5x+2$.
28. $6a^2-7a-3$.
29. $5x^2-8x-4$.
30. $3y^2-y-2$.
31. $4a^2-5a+1$.
32. $2a^4+5a^2+3$.
33. $6-a-a^2$.
34. $10-3a-a^2$.
35. $10a-7-3a^2$.
36. $8+6a-5a^2$.

Si $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, y $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, factorizar los siguientes binomios:

37. c^3+d^3.
38. a^3+1.
39. a^3-1.
40. a^3+27.
41. $125+x^3$.
42. $216-a^3$.
43. $1+64a^3$.
44. $8c^3-64a^3$.
45. $1000+b^3$.
46. $a^3b^3-c^3$.
47. a^3-8b^6.
48. $(m-n)^3-1$.

Simplificar:

49. $\dfrac{a^4+3a^2-10}{a^4-25}$. 50. $\dfrac{ax-2+a-2x}{a^2-4a+4}$.

51. $\dfrac{ab+2a+3b+6}{ab+2a-b-2}$. 52. $\dfrac{ab-a+b-1}{ab-a-b+1}$.

53. $\dfrac{xy-x+6y-6}{xy+x+6y+6}$. 54. $\dfrac{a^3b+2a^2b+4ab}{a^3-8}$.

55. $\dfrac{27x+x^4}{2x^3-6x^2+18x}$. 56. $\dfrac{(a^3+b^3)(a^2+ab+b^2)}{(a^3-b^3)(a^2-ab+b^2)}$.

Efectuar las operaciones siguientes y simplificar los resultados:

57. $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}+\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b-a}$.

Indicación: $\dfrac{b}{b-a}=\dfrac{-b}{a-b}=-\dfrac{b}{a-b}$

58. $\dfrac{3}{1+a}-\dfrac{2}{1-a}-\dfrac{5a}{a^2-1}$.

59. $\dfrac{a+c}{(a-b)(x-a)}+\dfrac{b+c}{(b-a)(x-b)}$.

60. $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$.

61. $\dfrac{bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{ab}{(c-a)(c-b)}$.

62. $\dfrac{1+2a}{1-2a}-\dfrac{1-2a}{1+2a}+\dfrac{8a}{(1-2a)^2}$. Indicación: Sumar primero las dos primeras fracciones.

63. $\dfrac{1}{b+a}+\dfrac{4a}{b^2-a^2}+\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{2a}{b^2+a^2}$.

64. $\dfrac{2}{x+y}-\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{3y}{y^2-x^2}+\dfrac{xy}{x^3+y^3}$.

65. $\dfrac{1}{a^2-5a+6}+\dfrac{1}{a^2-4a+3}+\dfrac{1}{a^2-3a+2}$.

66. $\dfrac{a-b}{b-c}-\dfrac{b-c}{c-a}-\dfrac{c-a}{c-b}$.

67. $\dfrac{a^2+ab}{a^2+b^2}\cdot\dfrac{a^4-b^4}{ab+b^2}\cdot\dfrac{b}{a}$.

68. $\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-9}\cdot\dfrac{x^2+x-6}{x^2+4x-5}:\dfrac{x-2}{x^2-4x+3}$.

69. $\dfrac{xy+2x+3y+6}{xy+2x-y-2}\cdot\dfrac{xy-2x-y+2}{xy-2x+3y-6}$.

70. $\dfrac{2}{1-a^2}:\left(\dfrac{1}{1-a}-\dfrac{1}{1+a}\right)$.

71. $\left(\dfrac{x^2}{y^2}+1+\dfrac{y^2}{x^2}\right):\left(\dfrac{x}{y}+1+\dfrac{y}{x}\right)$.

72. $\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\left(1-\dfrac{a}{b}\right):\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)$.

73. $\left(y+\dfrac{xy}{y-x}\right)\left(y-\dfrac{xy}{x+y}\right):\dfrac{x^2y^2}{x^2-y^2}$.

Reducir a fracciones simples:

74. a) $2+\frac{1}{2}$; b) $2+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}$; c) $2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}$;

d) $2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}}$

75. $\dfrac{1}{2+\dfrac{3}{4+\dfrac{5}{a}}}$.

76. $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}}}$.

77. $\dfrac{1-\dfrac{b}{a}}{a-\dfrac{ab}{a-\dfrac{a}{1+\dfrac{b}{a}}}}$.

78. $\dfrac{a-3}{a-3-\dfrac{a}{a-\dfrac{a-2}{a-3}}}$

Encontrar el valor de

79. $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a}}}-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a}}}$.

80. $\dfrac{3}{a+1}+\dfrac{4}{a-1}-\dfrac{\dfrac{2}{a}}{1+\dfrac{1}{a}}$.

81. $\dfrac{3\left(a^2-\dfrac{1}{9}\right)}{3a+1}+\dfrac{1}{3}$.

82. $\dfrac{1+\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{a}}\cdot\dfrac{\dfrac{1}{a^2}}{a^2-\dfrac{1}{a^2}}:\dfrac{\dfrac{1}{a}}{a-2+\dfrac{1}{a}}$.

83. $\dfrac{1}{a-\dfrac{3}{a+\dfrac{1}{3}}}\cdot\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{a}}:\dfrac{a}{3a-\dfrac{9-4a}{a-1}}$.

84. $\dfrac{\dfrac{1+a^2}{1-a^2}+\dfrac{4a^2}{1-a^4}-\dfrac{1-a^2}{1+a^2}}{\dfrac{a}{1-a^2}+\dfrac{a}{1+a^2}+\dfrac{2a}{1-a^4}}$.

Resolver las ecuaciones:

85. $2\frac{1}{3}x-5\frac{5}{7}=4\frac{5}{12}+\frac{13}{14}x-\frac{x}{3}$

86. $a(1-x)-b(1-x)=c(1-x).$

87. $\dfrac{9y+5}{6(y-1)}+\dfrac{3y^2-51y-71}{18(y^2-1)}=\dfrac{15y-7}{9(y+1)}.$

88. $\dfrac{a}{x+b^2}+\dfrac{b}{x+a^2}=\dfrac{a+b}{x+2ab}.$

89. $\dfrac{a}{b(a-x)}+\dfrac{c}{d(x-a)}=\dfrac{ad-bc}{3abd}.$

90. $(a+x)\,(b+x)-a\,(b+c)=\dfrac{ca^2+bx^2}{b}.$

91. $\dfrac{ax+b}{c}+\dfrac{ax+b}{cx+b}=\dfrac{2ax+d}{2c}+\dfrac{b}{c}.$

92. $m\left(x+1\right)\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=m(m+x)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+m^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)-m.$

93. $a(b-x)+ab\left(\dfrac{x}{a}+1\right)^2=\dfrac{b}{a}(a+x)^2.$

94. $\left(\dfrac{x}{b}+2\right)\left(\dfrac{2x}{b}-1\right)+\dfrac{1}{b^2}(x-2b)\,(2x-b)=\left(\dfrac{2x}{b}+1\right)^2-4.$

95. $\dfrac{x^2-4x+5}{x^2+6x+10}-\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^2=0.$

96. $\dfrac{x}{x+a-b}+\dfrac{x}{x+b-c}=2.$

97. $\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{x-b}=\dfrac{a^2+b^2}{x(x-a-b)+ab}.$

98. $\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{14}{x+10}=\dfrac{10}{x+6}+\dfrac{6}{x+14}.$

99. $\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x-3}{x-4}=\dfrac{x-2}{x-3}-\dfrac{x-4}{x-5}.$

100. $\dfrac{1-\dfrac{1+\dfrac{1-x}{2}}{3}}{4}=1.$

101. $5+\dfrac{2}{3+\dfrac{1}{4-x}}=\dfrac{39}{7}.$

102. $\dfrac{\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{\dfrac{2}{x}}{2-\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{x}}}.$

103. $\dfrac{\dfrac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}-\dfrac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1}}{\dfrac{1-x}{1+x}}=\dfrac{4}{2+x}$

104. $\dfrac{x^2-a^2}{x-a}+\dfrac{x^2-b^2}{x-b}+\dfrac{x^2-c^2}{x-c}=a+b+c-3x.$

105. ¿Qué valor debe tener k en la ecuación:

$$bx+kb-1+\frac{x}{b}=0.$$

para que su incógnita sea igual a ab?

106. $x - \dfrac{2x-0{,}3}{0{,}7} = \dfrac{5-x}{0{,}35}$.

107. Compruebe que

$$\frac{1}{3+\dfrac{1}{3+\frac{1}{3}}} - \frac{1}{4+\dfrac{1}{4+\frac{1}{4}}} \text{ es menor que } \tfrac{1}{12}.$$

108. Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{3}$, calcular el valor de $\dfrac{3ab-b^2}{a^2}$.

109. Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{4}{5}$, calcular el valor de $\dfrac{a-3b}{2b} + \dfrac{3a}{a+b}$.

110. Repartir E° 801 entre cuatro personas en razón inversa de sus edades que son 20, 25, 30 y 40 años, respectivamente.

111. Las edades de dos personas son 23 años y 40 años respectivamente. Se desea saber dentro de cuántos años sus edades estarán en la razón 2 : 3.

112. Si

$$\begin{aligned} a : b &= 4 : 5 \\ a : d &= 2 : 3 \\ d : c &= 3 : 7 \end{aligned}$$

Se pide a) la razón entre a, b, c, d. b) Calcular sus valores si $2a-b+2c-d=50$.

113. 81 obreros trabajando $8\frac{1}{2}$ horas diarias durante 30 días han excavado un foso de 1530 m de largo, 1,5 m de ancho y 3,5 m de profundidad. Se pide la longitud excavada por 54 obreros de la misma actividad, trabajando $8\frac{2}{3}$ horas diarias durante 54 días si la excavación fuera de 2 m de ancho y $3\frac{3}{5}$ m de profundidad.

114. Una cantidad m aumenta en k. Se pide:
a) Expresar ese aumento en tanto por ciento.
b) Calcular k de modo que corresponda a un 20% de aumento.

115. Una persona vende dos objetos en E° 600 cada uno. Si el primero lo vende con 20% de ganancia y el segundo con 20% de pérdida, ¿qué tanto por ciento ganó o perdió en la operación?

116. En una aleación de zinc, cobre y estaño, el zinc es el 60% del cobre y éste el 40% del estaño. Calcular la cantidad de cada metal que hay que fundir para obtener 123 toneladas de aleación.

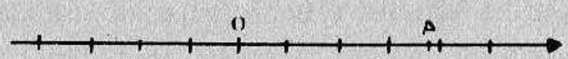
117. Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, demostrar que $\dfrac{a-c}{b-d} = \dfrac{a+c}{b+d}$.

CAPITULO VIII

REPRESENTACION GRAFICA

1. Determinación de un punto sobre una recta.

Se elige, en primer lugar, un punto origen sobre la recta, y a partir de él se aplican *trazos* iguales en ambos sentidos; uno de estos sentidos se elige como positivo, el otro es el negativo.



A cada punto A de la recta se hace corresponder el número x (entero, fraccionario o irracional) que mide la distancia OA. Ese número x es la *abscisa* del punto A. Se escribe A(x).

La correspondencia entre puntos y números es *biunívoca*, es decir, a cada punto corresponde una abscisa y a cada abscisa corresponde un punto.

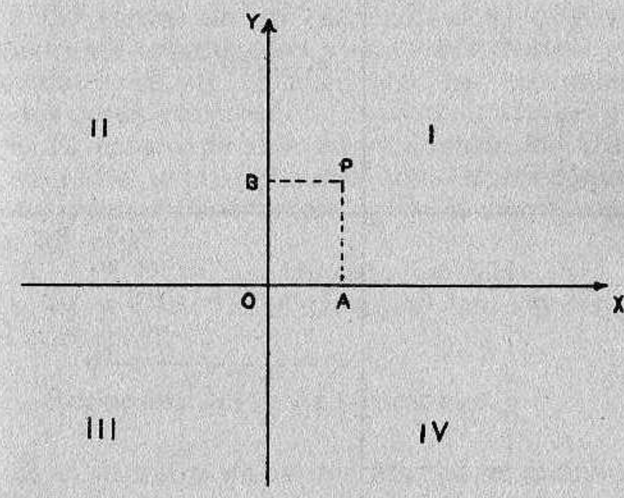
Ejercicio:

Representar los puntos A(3), B(—2), C(2,5) y D($\sqrt{2}$).

2. Determinación de un punto en el plano.

La ubicación de un punto en un plano necesita dos datos. Estos datos pueden referirse a dos rectas perpendiculares que dividen el plano en cuatro partes o *cuadrantes*, que se denominan, según la figura, I, II, III y IV.

El punto de intersección de las rectas es el *origen*. Se aplican, a partir de él, trazos iguales en ambos sentidos en cada recta.

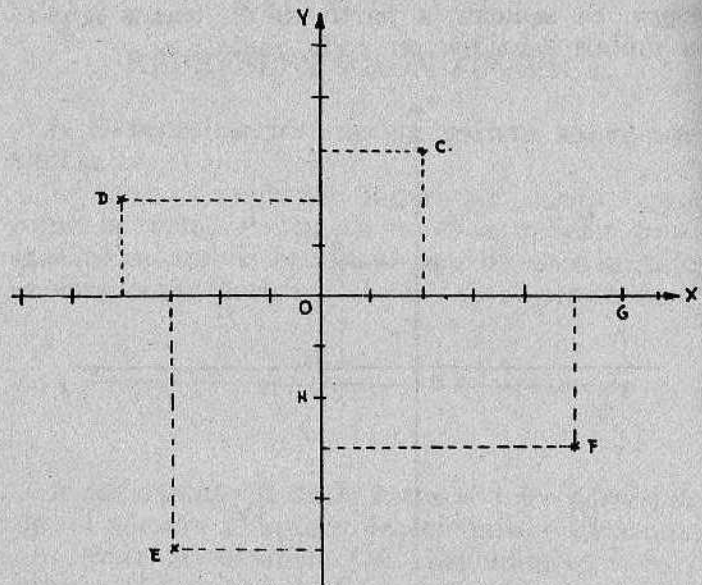


El eje OX se llama *eje de las abscisas* y el eje OY se llama *eje de las ordenadas*.

Por cada punto P del plano se trazan las paralelas a los ejes. La paralela al eje de las Y corta al eje de las X en el punto A, OA es la *abscisa* de

P. La paralela al eje de las X corta al eje de las Y en el punto B: OB es la *ordenada* de P. Los números OA = x y OB = y son las *coordenadas* de P. Se denota: P(x, y).

Por ejemplo, las coordenadas del punto C se escriben C(2, 3). Análogamente se tiene D(—4, 2), E(—3,—5), F(5,—3), G(6, 0) y H(0,—2). Las coordenadas del origen son iguales a cero: O(0, 0).



Ejercicios.

1. Representar los puntos: A(2, 5); B(—2, 5); C(—2, —5) y D(2, —5).

2. Dibujar el triángulo cuyos vértices son: A(0, 0), B(8, 0) y C(4, 6). ¿Qué clase de triángulo es?

3. ¿Qué clase de triángulo es aquel cuyos vértices son A(5, 0), B(0, 5) y C(0, 0)?

4. Los vértices de un cuadrado ABCD son: A(0, 0) y B(0, 7). ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices C y D?

5. Calcular la superficie del triángulo con vértices A(2, 0), B(10, 0) y C(4, 8).

6. Calcular la superficie del triángulo con vértices A(4, 3), B(12, 3) y C(6, 11).

7. Clasificar según sus ángulos al triángulo de vértices A(—6, 2), B(5, 2) y C(—8, 10).

8. El centro de un cuadrado es el origen del sistema de coordenadas y el vértice A tiene coordenadas (—9, 0). ¿Cuáles son las coordenadas de los otros vértices?

9. El centro de una circunferencia es A(0, 0) y su radio es 10. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos de intersección de la circunferencia con los ejes?

10. ABCD es un trapecio isósceles. A(1, 0), B(8, 0) y C(3, 6). ¿Cuáles son las coordenadas del vértice C?

3. Representación de funciones.

Si el literal *y* no representa ya un número determinado, sino que puede tomar todos los valores de cierto intervalo, se dice que *y* es una *variable*.

Si *y* depende de otra variable *x*, de modo que los valores de *y* están determinados por los valores de *x*, se dice que *y es función de x*. Se escribe y = f(x). *x* es la variable *independiente* e *y* es la variable *dependiente*.

Se dice que *y* es la imagen del elemento *x* por la función *f*.

f(x) puede ser una expresión matemática cualquiera. Por ejemplo, en el movimiento uniformemente acelerado, la velocidad es función del tiempo

$$v = f(t)$$

y la expresión matemática es

$$v = vi + at.$$

Para representar gráficamente una función es necesario tener varios puntos del gráfico. Se obtienen dando valores numéricos a la variable independiente y calculando los respectivos valores de la variable dependiente. A continuación se unen los puntos por una línea continua.

Ejemplo 1.

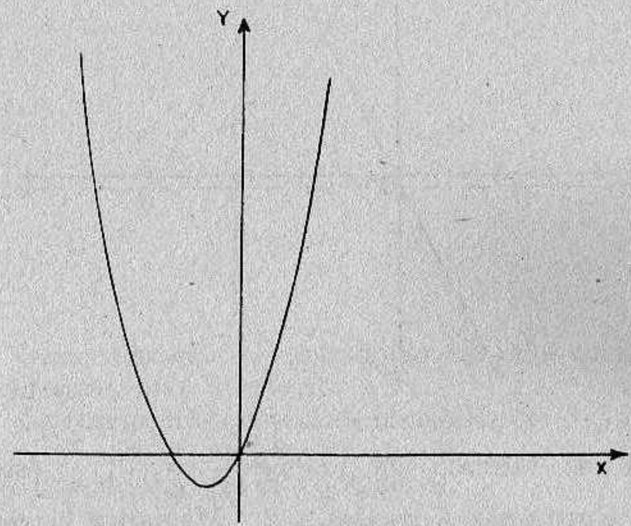
Sea la función $y = x^2 + 2x$

Entonces, para $x = -3,\ y = (-3)^2 + 2 \cdot (-3) = 3$
» $x = -2,\ y = (-2)^2 + 2 \cdot (-2) = 0$
» $x = -1,\ y = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) = -1$
» $x = 0,\ y = 0 + 2 \cdot 0 = 0$
» $x = 1,\ y = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$
» $x = 2,\ y = 2^2 + 2 \cdot 2 = 8$
» $x = 3,\ y = 3^2 + 2 \cdot 3 = 15$
» $x = 4,\ y = 4^2 + 2 \cdot 4 = 24$
etc.

Estos valores se pueden indicar más cómodamente mediante una tabla de valores:

x	—3	—2	—1	0	1	2	3	4
y	3	0	—1	0	3	8	15	24

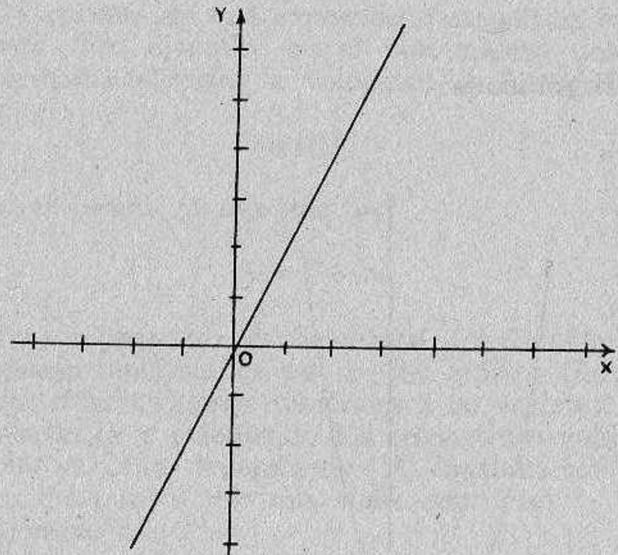
El gráfico es:



Ejemplo 2.

Sea la función $y = 2x$.
La tabla de valores es:

x	—2	—1	0	1	2	3	4
y	—4	—2	0	2	4	6	8



Si se forman las razones $\frac{y_1}{x_1}, \frac{y_2}{x_2}, \frac{y_3}{x_3}, \ldots$ éstas son constantes e iguales a 2. Mediante la geometría elemental se demuestra que los puntos $P_1, P_2, P_3 \ldots$ están en línea recta. Entonces, la ecuación

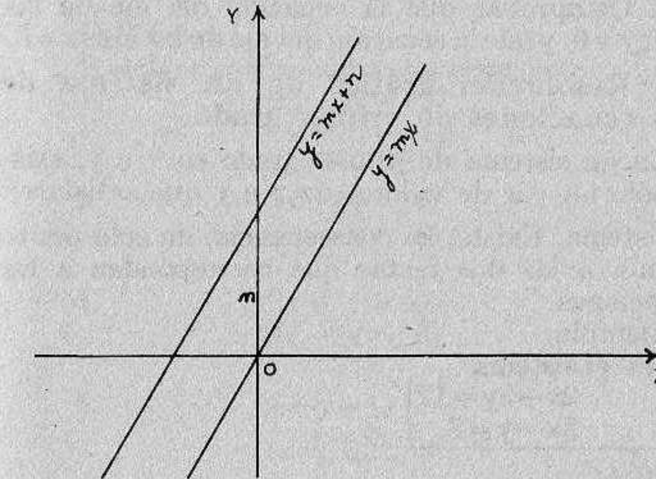
$$y = mx$$

en que m es una constante, representa una línea recta que pasa por el origen. Pasa por el origen porque la ecuación se satisface para $x=0$, $y=0$ que son las coordenadas del origen.

Si las ordenadas se aumentan en n, la nueva ecuación es

$$y = mx + n$$

que representa una recta *paralela a la anterior.*



Una ecuación de primer grado entre dos variables representa una línea recta.

La forma más general de escribirla es:

$$ax + by + c = 0$$

en que a, b y c son constantes.

Ejercicios.

Representar gráficamente las rectas:

1. $3x+4y=12$.

2. $x+2y=6$.

3. $7x+2y=14$.

4. $7x-2y=14$.

5. $x+y=5$.

6. $\frac{x+4}{3} + \frac{y+1}{2} = 4$.

7. Dibujar la recta para los cuales $x=4$.

8. ¿Dónde se encuentran los puntos para los cuales $y=3$?

9. Comprobar que la ecuación del eje de las X es y = 0, y que la ecuación del eje de las Y es x = 0.

4 Resolución gráfica de un sistema de dos ecuaciones de primer grado.

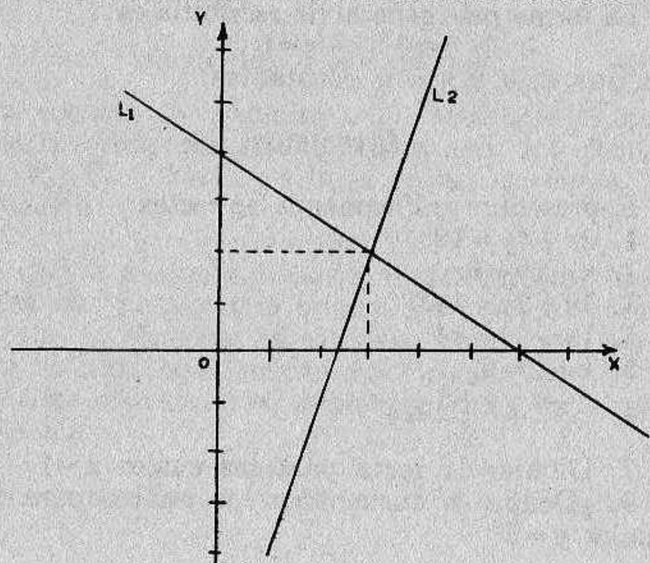
En un sistema de primer grado en x e y, existe sólo un par de valores de **x** e **y** que satisfacen el sistema. Existe, en consecuencia, un solo punto común a las dos rectas que corresponden a las ecuaciones.

Ejemplo:

Sea el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=12 \\ 3x-y=7 \end{array}\right|$$

Se dibujan las rectas L_1: $2x+3y=12$ y L_2: $3x-y=7$. Las coordenadas del punto de intersección de las rectas es la solución del sistema.



Ejercicios.

Resolver gráficamente los sistemas:

1. $\left.\begin{array}{r} 2x-5y=10 \\ x+2y=4 \end{array}\right|$

2. $\left.\begin{array}{r} 3x+5y=15 \\ x-y=0 \end{array}\right|$

3. $\left.\begin{array}{r} 2x+y=10 \\ 3x-2y=6 \end{array}\right|$

4. $\left.\begin{array}{r} x+y=11 \\ y=2x+5 \end{array}\right|$

5. $\left.\begin{array}{r} x-2y=3 \\ 4x+3y=12 \end{array}\right|$

6. $\left.\begin{array}{r} x-y=6 \\ y=15 \end{array}\right|$

7. $\left.\begin{array}{r} x=12 \\ x+y=8 \end{array}\right|$

8. $\left.\begin{array}{r} x+y=8 \\ x-y=2 \end{array}\right|$

9. $\left.\begin{array}{r} 5x+3y=15 \\ 5x-5y=15 \end{array}\right|$

10. $\left.\begin{array}{r} x+y=6 \\ x:y=2:3 \end{array}\right|$

11. Un triángulo tiene como lados el eje de las abscisas, la recta $y=x$ y la recta $4x+5y=20$. Calcular las coordenadas de sus vértices.

12. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son: $x=0$, $y=0$, $5x+2y=10$. ¿Qué clase de triángulo es? Calcular sus vértices.

13. ¿Qué puede decir de las rectas $3x+2y=6$ y $3x+2y=10$? Haga el gráfico correspondiente.

14. Dibuje el gráfico de las rectas $6x+y=7$ y $12x+2y=14$. ¿Qué características tienen las rectas? ¿Por qué?

SEGUNDA PARTE

Correspondiente al quinto año de humanidades.

CAPITULO IX

Variación proporcional

1. Definición.—Una magnitud A varía directamente proporcional con otra magnitud B si los valores correspondientes de A y B están en la misma razón. Por ejemplo, son magnitudes proporcionales el camino recorrido por un vehículo con velocidad uniforme y el tiempo empleado en recorrerlo.

Si a_1, a_2, a_3, pertenecen al conjunto A y b_1, b_2, b_3, son los valores correspondientes del conjunto B, se tiene por definición:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k$$

siendo k una constante.

Entonces, generalizando

$$\frac{A}{B} = k$$

o sea, $A = k \cdot B$

A k se le llama constante de proporcionalidad. En el ejemplo citado anteriormente $s = k \cdot t$, k es la velocidad.

2. Definición. Una magnitud C varía inversamente proporcional con otra magnitud D, si los valores correspondientes de C son directamente proporcionales a los valores recíprocos de D.

Sean c_1, c_2, c_3, valores de la magnitud C y d_1, d_2, d_3, los valores correspondientes de la magnitud D, según la definición:

$$c_1 : c_2 : c_3 = \frac{1}{d_1} : \frac{1}{d_2} : \frac{1}{d_3}$$

En general $C = k \cdot \frac{1}{D}$ donde k es una constante.

3. Definición.—Una magnitud A es directamente proporcional a varias otras si lo es a su producto. Sean B y C las otras, entonces:

$$A = k \cdot B \cdot C$$

Por ejemplo, la superficie S de un triángulo varía proporcionalmente con un lado y la altura correspondiente.

$$S = \frac{1}{2}\, a \cdot h$$

La constante es, en este caso, $\frac{1}{2}$.

4. Definición.—Si A varía directamente proporcional a B y C e inversamente proporcional a D y E, entonces:

$$A = k \cdot \frac{B \cdot C}{D \cdot E}$$

Ejemplo: La fuerza con que se atraen dos cuerpos de masas m_1 y m_2 colocadas a la distancia r es

$$F = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

k es la constante de gravitación universal.

Ejemplos de ejercicios.

a) Si x es proporcional a y y $x = 20$ cuando $y = 15$, encontrar el valor de y cuando $x = 16$.

Según la definición

$$\frac{20}{15} = \frac{16}{y}$$

resulta $y = 12$

b) Si a es directamente proporcional a b e inversamente proporcional a c y $a = 4$ cuando $b = 12$ y $c = 15$, calcular el valor de a para $b = 21$ y $c = 35$.

$$a = k \cdot \frac{b}{c}$$

Se puede determinar la constante de proporcionalidad k sustituyendo a, b y c por los valores dados.

$$4 = k \cdot \frac{12}{15}$$

resulta $k = 5$

Para calcular el valor pedido se sustituye k.

$$a = 5 \cdot \frac{21}{35}$$

da como resultado $a = 3$.

Ejercicios.

1. Si x es directamente proporcional a y e $y = 5$ cuando $x = 8$, calcular el valor de y cuando $x=12$.

2. x es proporcional a y. Si $x = -14$ cuando $y = 4$, calcular el valor de x cuando $y = 6$.

3. a es inversamente proporcional a b. Si $a=24$ cuando $b=16$, encontrar el valor de a para $b=8$.

4. A es proporcional a B y a C. Si $A=4$ cuando $B=3$ y $C=6$, encontrar A cuando $B=10$ y $C=9$.

5. x varía conjuntamente con y y z; $x=9$ cuando $y=5$, $z=7$ Encontrar y cuando $x=54$ y $z=2$.

6. A es directamente proporcional a B e inversamente proporcional a C. Si $A=9$ cuando $B=25$ y $C=20$, encontrar el valor de A para $B=27$ y $C=18$.

7. x es inversamente proporcional al cuadrado de r. Se sabe que para $r=6$ $x=16$. ¿Cuál es el valor de x para $r=8$?

8. El área de un cuadrado es proporcional al cuadrado de su diagonal. Si la diagonal es 8 el área es 32. ¿Cuál es el área si la diagonal mide 12?

9. La intensidad de un sonido es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente sonora. ¿A cuánto se reduce la intensidad al alejarse al triple de la distancia?

10. El volumen de una pirámide varía con la superficie de la base y con la altura. El volumen de cierta pirámide es 75 m^3 siendo su base un cuadrado de lado 5 m y su altura 9 m. Calcular la constante de proporcionalidad.

11. Los espacios recorridos por un cuerpo que cae libremente son proporcionales a los cuadrados de los tiempos empleados en recorrerlos. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

12. $S=4\pi r^2$ ¿Qué le ocurre a S si a) r se triplica; b) r se divide por 10?

13. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ¿Qué le ocurre a V si a) r se duplica; b) r se divide por 5?

14. $I = \frac{m}{d^2}$ ¿Qué le ocurre a I si a) d se triplica; b) d se divide por 10?

Gráfico y estudio de la función $xy = k$, o $y = \frac{k}{x}$.

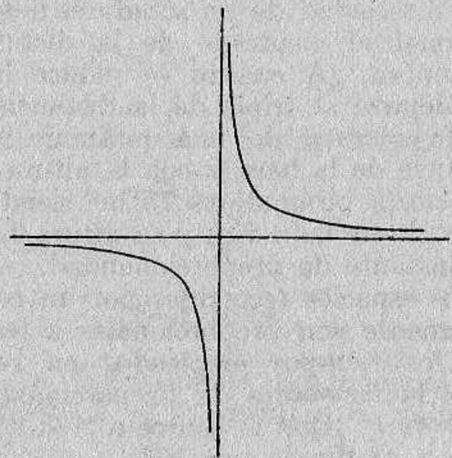
Distinguiremos dos casos: $k > 0$ y $k < 0$

Ejemplo del primer caso

$$y = \frac{6}{x}$$

Tabla de valores:

-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-1,2	-1,5	-2	-3	-6		6	3	2	1,5	1



Se observa en el gráfico que la curva se acerca constantemente a los ejes.

Al aumentar x en valor absoluto, los valores de y tienden a 0. En efecto, la fracción $\frac{6}{x}$ decrece al aumentar su denominador.

Si una curva se acerca a una recta, siendo tangente a ella en un punto del infinito, la recta se llama **asíntota** de la curva. Los ejes de coordenadas son las asíntotas de esta curva.

Toda ecuación de la forma $xy = k$ o $y = \frac{k}{x}$ tiene como gráfico una curva que recibe el nombre de **hipérbola**. Es una **hipérbola rectangular** porque sus asíntotas son perpendiculares entre sí.

Otra propiedad interesante de esta curva es el ser simétrica con respecto al origen del sistema

de coordenadas. Analíticamente se muestra esto porque al cambiar (x, y) por $(-x, -y)$ la función no cambia.

Es también importante hacer notar la discontinuidad de la función para $x = 0$. Al tender x a 0 por valores decrecientes la función tiende a $+\infty$ y al tender por valores crecientes (desde valores negativos) la función tiende a $-\infty$. La función no está definida para este valor de x. Una función de una variable x no está definida para un valor de x, si para este valor de x, no tiene un valor bien determinado.

Valores importantes:

Si x tiende a $+\infty$, y tiende a 0 por valores positivos.

Si x tiende a $-\infty$, y tiende a 0 por valores negativos.

En el segundo caso, **k negativo,** los valores importantes son:

Si x tiende a 0 por valores positivos, y tiende a $-\infty$.

Si x tiende a 0 por valores negativos, y tiende a $+\infty$.

Si x tiende a $+\infty$, y tiende a 0 por valores negativos.

Si x tiende a $-\infty$, y tiende a 0 por valores positivos.

CAPITULO X

Potencias.

54. Definición.—El producto 4 . 4 . 4 se escribe abreviadamente 4^3 y se lee 4 elevado a 3, o, más brevemente, 4 al cubo.

La operación que resulta es la *elevación a potencia*, y consiste en repetir un número como factor cierto número de veces. El factor que se repite se llama *base* (4), el número de veces que la base se repite se llama *exponente* (3) y el resultado se llama *potencia* ($4^3=64$). El exponente debe ser, según la definición, un número entero y positivo. (Ejercicios 1 a 7).

55. Multiplicar potencias de igual base.

$a^5 \cdot a^3 = aaaaaaaa = a^8$, según definición.

En general,

$$a^m \cdot a^n = aaa\ldots a \text{ (m veces)} \cdot aaa\ldots a \text{ (n veces)}$$
$$= aaa\ldots \text{ (m+n veces)}$$
$$= a^{m+n}; \text{ luego}$$

Teorema I.—*Para multiplicar potencias de igual base, se eleva la base a la suma de los exponentes.* (Ejercicios 8 a 17).

Como una igualdad subsiste al cambiar el orden de sus miembros, resulta del teorema anterior, que

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n; \text{ luego}$$

Teorema II. (Recíproco).—*Una potencia cuyo exponente es una suma, es igual a un producto de potencias de igual base que tienen de exponentes los sumandos, respectivamente.* (Ejercicios 18 a 20).

56. Dividir potencias de igual base.

$$a^8 : a^5 = \frac{aaaaaaaa}{aaaaa} = a^3, \text{ por simplificación.}$$

En general,

$a^m : a^n = a^{m-n}$, porque $a^n \cdot a^{m-n} = a^m$; luego

Teorema III.—*Para dividir potencias de igual base se eleva la base a la diferencia de los exponentes.* (Ejercicios 21 a 34).

Del teorema anterior resulta:

$$a^3 = a^{8-5} = a^8 : a^5$$
$$\text{y } a^{m-n} = a^m : a^n; \text{ luego}$$

Teorema IV. (Recíproco).—*Una potencia cuyo exponente es una diferencia, es igual a un cuociente de potencias de igual base, en el cual el* *dividendo tiene de exponente el minuendo y el divisor el sustraendo.* (Ejercicio 35).

57. Potencias de exponente cero y de exponente negativo.

En las aplicaciones del teorema III, expresado por la relación:

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

se pueden presentar tres casos, según la relación entre los exponentes m y n.

1.er caso: m>n. La diferencia m—n es un número entero y positivo; satisface las condiciones del exponente.

2.° caso: m=n. La diferencia m—n es igual a cero. Una potencia de exponente cero no se puede explicar por la definición de elevación a potencia.

Como el cero proviene de la diferencia de dos cantidades iguales, por ejemplo, m—m=0, se puede escribir:

$$a^0 = a^{m-m}$$
$$= a^m : a^m = 1 \text{ (Teor. IV).}$$

El mismo resultado se obtiene de:

$$a^m \cdot a^0 = a^{m+0} = a^m \text{ (Teor. I).}$$

De donde: $a^0 = a^m : a^m = 1$; luego

Una potencia de exponente cero es igual a la unidad positiva.

3.er caso: m<n. La diferencia m—n es un número negativo; no satisface las condiciones del exponente.

Un número negativo proviene de restar un número de otro mayor, por ejemplo, —3=0—3; —p=0—p.

De modo que:

$$a^{-3} = a^{0-3} = \frac{a^0}{a^3} = \frac{1}{a^3} = \left(\frac{1}{a}\right)^3 \qquad \text{(Teor. IV)}$$

$$\text{y } a^{-p} = a^{0-p} = \frac{a^0}{a^p} = \frac{1}{a^p} = \left(\frac{1}{a}\right)^p; \text{ luego}$$

Una potencia de exponente negativo es igual al valor recíproco de la base elevado al mismo exponente positivo. (Ejercicios 36 a 45).

58. Multiplicar potencias de igual exponente y elevar a potencia un producto.

$$\begin{aligned} a^3 \cdot b^3 &= aaa \cdot bbb \\ &= (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \\ &= (ab)^3 \end{aligned}$$

En general,

$$\begin{aligned} a^m \cdot b^m &= aaa\ldots a \text{ (m veces)} \cdot bbb\ldots b \text{ (m veces)} \\ &= (ab) \cdot (ab) \cdot (ab)\ldots (ab) \text{ (m veces)} \\ &= (ab)^m; \text{ luego} \end{aligned}$$

Teorema V.—*Para multiplicar potencias de igual exponente, se eleva el producto de las bases al exponente común.* (Ejercicios 46 a 54).

Del teorema V resulta:

$$(ab)^3 = a^3 \cdot b^3$$
$$\text{y } (ab)^m = a^m \cdot b^m; \text{ luego}$$

Teorema VI. (Recíproco).—*Para elevar a potencia un producto, se eleva cada uno de los factores* *y se multiplican las potencias que resultan.* (Ejercicios 55 a 59).

59. Dividir potencias de igual exponente y elevar a potencia un cuociente o una fracción.

$$a^3 : b^3 = \frac{aaa}{bbb} \quad \text{(Def.)}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \quad \text{(Producto de fracciones)}$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^3 \quad \text{(Def.)}$$

En general,

$$a^m : b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m,$$

puesto que:

$$b^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m = a^m; \text{ luego}$$

Teorema VII.—*Para dividir potencias de igual exponente, se eleva el cuociente de las bases al exponente común.* (Ejercicios 60 a 68).

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \quad \text{(Def.)}$$

$$= \frac{aaa}{bbb} \quad \text{(Multiplicar fracciones)}$$

$$= \frac{a^3}{b^3}.$$

Análogamente:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}; \text{ luego}$$

Teorema VIII.—*Para elevar a potencia un cuociente o una fracción, se eleva cada uno de sus términos y se dividen las potencias que resultan en el mismo orden.* (Ejercicios 69 a 75).

60. Elevar una potencia a potencia.

$$\begin{aligned} (a^4)^3 &= a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 && \text{(Def.)} \\ &= a^{4+4+4} && \text{(Teor. I)} \\ &= a^{12} \end{aligned}$$

En general,

$$\begin{aligned} (a^m)^n &= a^m \cdot a^m \cdot a^m \ldots a^m && \text{(n veces)} \\ &= a^{m+m+m+\ldots+m} && \text{(n veces)} \\ &= a^{mn}; \text{ luego} \end{aligned}$$

Teorema IX.—*Para elevar a potencia una potencia, se eleva la base al producto de los exponentes.* (Ejercicios 76 a 86).

Cambiando el orden de los miembros de la tesis del teorema anterior, resulta:

$$a^{12} = (a^4)^3 = (a^3)^4$$
$$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m; \text{ luego}$$

Teorema X. (Recíproco).—*Para elevar un número a un exponente que es un producto, se eleva sucesivamente a cada uno de los factores en cualquier orden.*

61. Signo de una potencia.

Toda potencia de un número positivo debe ser positiva, según la definición.

Para potencias de base negativa se distinguen dos casos: 1.° potencias de exponente par; 2.° potencias de exponente impar.

1.^{er} *caso.* Un número par se expresa por la fórmula 2n, siendo n un número entero.

$$(-a)^{2n} = [(-a)^2]^n \qquad \text{(Teor. X).}$$

Como el cuadrado de un número relativo es siempre positivo, puesto que es el producto de dos números del mismo signo, resulta:

$$\begin{aligned}(-a)^{2n} &= [(-a)^2]^n = (+a^2)^n \\ &= +a^{2n} \qquad \text{(Teor. IX); luego}\end{aligned}$$

Toda potencia de exponente par es positiva.

2.° *caso.* Un número impar se expresa por la fórmula 2n+1.

$$\begin{aligned}(-a)^{2n+1} &= (-a)^{2n} \cdot (-a) && \text{(Teor. II).} \\ &= +a^{2n} \cdot (-a) && \text{(1.}^{er}\text{ caso)} \\ &= -a^{2n+1} && \text{(Teor. I y sig-}\end{aligned}$$

no de un producto); luego

Toda potencia de exponente impar tiene el signo de la base. (Ejercicios 87 a 98).

Observaciones. 1.ª Los teoremas sobre potencias de exponentes positivos subsisten para potencias de exponentes negativos, lo que se demuestra fácilmente aplicando la definición de potencia con exponente negativo, y en seguida, el teorema correspondiente de potencias con exponentes positivos.

2.ª Si todos los términos de una proporción se elevan a una misma potencia, resulta una nueva proporción.

Si a : b = c : d es una proporción, lo es también: $\quad a^n : b^n = c^n : d^n$

porque si con cantidades iguales se ejecutan operaciones iguales, los resultados son también iguales.

Ejercicios.

1. Escribir en forma de potencia: *a)* 3 . 3 . 3 . 3 . 3; *b)* y . y . y . y . y . y . y; *c)* x.x...x; (p veces).

2. Desarrollar las potencias: 6^3, 7^2, 2^4, u^n.

3. ¿Cuál es la potencia de base 10 y de exponente 4? ¿Idem de base p y de exponente x?

4. Calcular: 8^2, 5^4, 9^3 3^2-2^4, 2^6+4^3.

5. Calcular y comparar: 2^3 y 3^2, 5^2 y 3^5, 2^4 y 4^2. ¿Qué se deduce de este ejercicio?

6. ¿Cuál es la diferencia entre $(16+4)^2$ y 16^2+4^2? ¿Idem entre $(10-3)^2$ y 10^2-3^2?

7. Calcular a^n, si a=4 y n=6.

---

8. $2^4 \cdot 2^3$; $3^2 \cdot 3^4$; $5^2 \cdot 5^3$.
9. $a^{17} \cdot a^{13}$; $b^x \cdot b^{x-1}$; $c^n \cdot c$.
10. $d^{a+b} \cdot d^{a-b}$; $m^{2x-3y} \cdot m^{4x+4y}$
11. $p^{n-2m} \cdot p^{3n-4m} \cdot p^2$; $x^{n-2} \cdot y^{n-3} \cdot x^{n-4} \cdot y^{n-5}$.
12. $1\frac{1}{2}a^2x^7 \cdot \frac{4}{5}a^4x^2 \cdot \frac{2}{3}ax$; $4\frac{1}{2}a^3b^5 \cdot \frac{3}{4}a^4b^2 \cdot \frac{8}{9}a^7b^6$.
13. $\dfrac{a^nb^{m-3n}}{m+n} \cdot \dfrac{a^{m-n}b^m}{m-n}$; $\dfrac{b^5a^3}{c^4} : \dfrac{c}{a^2b^2}$.
14. $\dfrac{x^{2n-5}y^{3-2p}}{z^{6a-7}} \cdot \dfrac{x^{n+6}y^p}{z^{a+9}}$; $\dfrac{m^{x-3y}n^{8-a}}{p^{7y-9}} : \dfrac{p^{10-6y}}{m^{4y-x}n^{x-7}}$
15. $(x^3+x)x^4$; $(a^5-a^3)a^7$.
16. $(a^n+a^{n-1}+a^{n+2}+a^{n-3})a^3$.

17. Expresar en un solo cuociente:

a) $\frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^4}$; b) $\frac{1}{26x^{10}} - \frac{2}{39x^9} - \frac{3}{65x^8}$.

c) $\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2-y^2}$; $\frac{a}{6(a+b)^4} - \frac{1}{12(a+b)^3}$.

---

18. Expresar en producto: a) x^{n+1}; b) y^{2p+q}; c) z^{a+b+1}

19. Descomponer: a) x^5 en un producto de dos factores; b) y^7 en un producto de tres factores; c) z^{15} en un producto de cuatro factores.

20. Calcular, descomponiendo en factores: 2^9, 3^{10}, 4^{12}, 5^8, 6^7.

---

21. $5^{28} : 5^{25}$; $8^{17} : 8^9$; $10^{12} : 10^8$.

22. $a^m : a^{m-n}$; $a^{n-1} : a$; $a^{x+y} : a^y$.

23. $(a+b)^{7m} : (a+b)^{6m-n}$; $4\frac{1}{4}x^5y^2 : 5\frac{2}{3}xy^2$.

24. $\frac{9(x+y)^3}{3(x+y)^2}$; $\frac{84a^6b^6}{28a^5b^2}$; $\frac{96x^8y^9}{24x^5y^7}$.

25. $\frac{x^5}{x^{5-n}}$; $\frac{a^{p+4}}{a^{p+2}}$; $\frac{x^{m+n}}{x^{m-n}}$.

26. $\frac{a^{5b-3c}}{a^{2b-c}}$; $\frac{a^{x+2}}{a^{x-1}}$; $\frac{a^{2m+3n-4c+7d}}{a^{m-4n+3c-9d}}$.

27. Calcular: a) 11^4, si $11^7 = 19\,487\,171$ y $11^3 = 1\,331$; b) 14^3, si $14^5 = 537\,824$ y $14^2 = 196$.

28. $(x^{12}+x^{10}) : x^5$; $(10{,}4x^6 - 6{,}5x^4) : 1{,}3x^3$.

29. $(35a^9 - 87a^8 + 54a^7) : (7a^5 - 9a^4)$.

30. $(x^2-y^2) : (x-y)$; $(x^3-y^3) : (x-y)$.

Generalizando este ejercicio, resulta que:
La diferencia de dos potencias de igual exponente es divisible por la diferencia de las bases.

31. $(x^4-y^4) : (x+y)$.

La generalización de este ejercicio expresa que:
La diferencia de dos potencias de igual exponente par es divisible por la suma de las bases.

32. $(x^3+y^3) : (x+y)$.

Generalizando este ejercicio resulta que:
La suma de dos potencias de igual exponente impar es divisible por la suma de las bases.

¿Qué ley se observa en los resultados de los tres ejercicios anteriores sobre los exponentes de las potencias y sobre los signos?

33. Escribir sin cálculo los resultados de las divisiones siguientes:

a) $(x^5-y^5) : (x-y)$; b) $(x^4+y^4) : (x+y)$
c) $(x^6-y^6) : (x \pm y)$; d) $(x^7 \pm y^7) : (x \pm y)$.

34. Descomponer en factores: a^2-b^2; x^4-1; y^3-1; $27a^3+64b^3$, $256x^4-81y^4$.

---

35. Expresar en forma de cuociente:
a^{n-1}, a^{3p-2q}; b^{3n-r}; x^2; y^4; a^{n-p-2}.

36. 2^0, 4^0-2^0, 7^0+9^0.
37. $15^0 \cdot 3^0$, $20^0 : 4^0$, $a^{m-n} \cdot a^{n-m}$.
38. $x^{3p+2q} : x^{2q+3p}$.
39. 4^{-2}, 2^{-1}, $(\frac{2}{3})^{-1}$, $(1\frac{1}{2})^{-2}$.
40. $a^{-2} \cdot a^{-3}$, $x^{-4} : x^2$, $2^{-2} : 2^6$.
41. $5^{-3} \cdot 5^0$, $10^3 : 10^7$.
42. $(1\frac{1}{5})^{-2} \cdot (\frac{5}{6})$, $(1\frac{1}{3})^{-3} : (\frac{3}{4})^5$.

Hacer desaparecer los exponentes negativos en as expresiones siguientes:

43. $\dfrac{n^{-8}c^5p^{-10}q^{-9}}{a^{-3}b^{-4}d^{-6}m^{-7}}$; $\dfrac{4^{-3}a^{-8}b^5}{6^{-2}m^{-4}n^5}$; $\dfrac{3^{-3}m^{-3}b^{-3}}{2^{-5}a^{-7}n^4}$

44. $\dfrac{5a^{-3}b^0m^{-5}p}{13c^{10}d^2n^{-1}q^{-3}} : \dfrac{15a^{-4}b^{-2}c^{-13}q^{11}}{26d^6m^0n^{-7}p^{-8}}$.

45. $\dfrac{a^{-3m}b^{-2m+1}}{c^{-4m}d^{-5m-7}} : \dfrac{a^{-2m+1}\,b^3}{c^{-m+3}d^{-m-3}}$.

---

46. $5^2.7^2$; $25^3.4^3$; $15^2.3^2$.
47. $4^3.(1\frac{1}{4})^3$; $2{,}5^4.0{,}4^4$; $\left(\dfrac{x}{y}\right)^5 \cdot y^5$.
48. $2^6.9^6.(\frac{1}{3})^6.(\frac{1}{6})^6$.
49. $\left(\dfrac{2m-3n}{5p-7q}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{5p-7q}{4m-6n}\right)^3 .2a^2$.
50. $(a+b)^2 \cdot (a-b)^2$; $(2a+3b)^m \cdot (2a-3b)^m$.
51. $(7xy-14y)^n \cdot (\frac{1}{7}y)^n$.
52. $12^{-3} \cdot (1\frac{1}{4})^{-3}$; $(\frac{2}{3})^{-3} \cdot (\frac{3}{8})^{-3}$; $(1\frac{3}{7})^{10} \cdot (1\frac{4}{5})^{10}$
53. $(1\frac{3}{4})^2 \cdot (1\frac{1}{7})^2$; $(7\frac{1}{2})^5 \cdot (1\frac{1}{3})^5$; $(2\frac{1}{7})^4 \cdot (4\frac{2}{3})^4$

54. Calcular 15^3, aprovechando $3^3=27$ y $5^3=125$.

---

55. $(2a)^4$; $(3xy)^4$; $(18ab)^2$.
56. $(3abc)^3$; $(4abx)^2$; $(5mn)^x$.
57. $\dfrac{(3ab)^4 \cdot (5c)^2 \cdot (4d)^4}{(5cd)^4 \cdot (6a)^2 \cdot (4d)^2}$.
58. $[3(x+y)]^2$; $[5ab(2c-d)]^2$.
59. $38^2=(19 \cdot 2)^2=361 \cdot 4=1\,444$.

Calcular del mismo modo 34^2, 48^2, 54^2, 12 28^2, 75^2.

---

60. $35^2 : 7^2$; $48^2 : 16^2$; $60^4 : 15^4$.
61. $\dfrac{91^3}{13^3}$; $\dfrac{104^4}{13^4}$; $\dfrac{216^3}{24^3}$.
62. $600^3 : (66\frac{2}{3})^3$; $156^4 : (15\frac{3}{5})^4$.
63. $(\frac{3}{5})^{-7} \cdot (\frac{4}{11})^{-7} \cdot (2\frac{7}{24})^{-7}+(2\frac{7}{12})^{-3} : (20\frac{2}{3})^{-3}$.
64. $\left(\dfrac{25x^2}{4y}\right)^2 : \left(\dfrac{5x}{12y^2}\right)^2$; $(12\frac{1}{7}a)^4 : (2\frac{3}{7})^4$.
65. $\dfrac{(3a-3b)^5}{(a-b)^5}$; $\dfrac{(75xz-10yz)^2}{(15z)^2}$
66. $(18a^2+5ab-33b^2)^2 : (2a+3b)^2$.
67. $(36a^2-25b^2)^2 : (6a+5b)^2$.
68. $(64x^2+80xy+25y^2)^n : (8x+5y)^n$.

69. $(\frac{2}{3})^3$; $(\frac{5}{6})^2$; $(\frac{1}{2})^3$.

70. $(\frac{1}{2})^5$; $(0{,}25)^3$; $(0{,}4)^2$.

71. $(1\frac{2}{3})^{-2}$; $(5\frac{3}{7})^{-2}$; $(1\frac{1}{4})^{-1}$.

72. $0{,}25^{-4}$; $0{,}0625^{-3}$; $1 : 0{,}125^{-3}$.

73. $$\left(\frac{5a}{6b}\right)^6 \cdot \left(\frac{7c}{3a}\right)^3 \cdot \left(\frac{18b}{35c}\right)^4.$$

74. $(\frac{3}{5}x - \frac{5}{6})^2$; $(\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{55}{21})^7 + (\frac{31}{12} : \frac{62}{3})^3$.

75. Reducir las expresiones siguientes a su forma más sencilla:

a) $$\left(\frac{3ab}{5cd}\right)^4 \cdot \left(\frac{5c}{6a}\right)^3 \cdot \left(\frac{4b}{3d}\right)^2$$

b) $$\left(\frac{a+b}{c-d}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{a+b}\right)^2 \cdot \left(\frac{c-d}{a+b}\right)^4$$

c) $$\left(\frac{m+n}{m-n}\right)^5 \cdot \left(\frac{p-q}{p+q}\right)^7 \cdot \left(\frac{p+q}{m+n}\right)^6 \cdot \left(\frac{m-n}{p-q}\right)^4$$

---

76. $(2^3)^2$; $(a^6)^2$; $(5x^2)^n$.

77. $[(a^2)^5]^4$; $(10^2)^3$; $\left(\frac{x^2y^3}{pq^2}\right)^4$

78. $\frac{(a^2)^3 \; (b^3)^2}{(ab)^4}$; $\left(\frac{a^m}{b^m}\right)^3 \cdot \left(\frac{b^m}{a^m}\right)^2$.

79. $$\left(\frac{a^3b^3}{c^4}\right)^2 \cdot \left(\frac{c^5b^4}{a^4}\right)^3; \quad \left(\frac{x^2y^3}{z^5}\right)^7 : \left(\frac{x^4y^6}{z^8}\right)^4.$$

80. $(a^{-2})^{-3}$; $(a^{-2})^3$; $[(\frac{2}{3})^{-2}]^3$.

81. Expresar 25^p, 16^y, 27^x, 81^z, en potencias de base 5, 2, 3, 3, respectivamente.

82. Calcular 3^6, aprovechando $3^3=27$.

83. Calcular 2^{10}, 4^8, 5^4; aprovechando el teorema de potencia de potencia.

84. ¿Los cuadrados de qué número son x^{12}, y^{20}?

85. Descomponer $x^{2n}-y^{2n}$ en un producto de dos factores.

86. Idem $a^{10}-b^{14}$.

---

87. $(-2)^2$; $(-2)^3$; $(-2)^4$; $(-2)^5$.

88. $(-3)^1$; $(-3)^2$; $(-3)^3$; $(-3)^4$.

89. $[(-a)^2]^3$; $(-a^3)^2$; $(-a)^{n+x} \cdot (-a)^{n-x}$.

90. $(-x)^3$; $(-x)^5$; $(-a)^4 \cdot (+b)^4$.

91. $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4$.

92. $(-\frac{2}{3})^{-2}$; $(-\frac{1}{4})^{-3}$.

93. $(-7)^2 - (-2)^5$; $(-\frac{5}{7})^3 \cdot (-\frac{2}{5})^2$.

94. $(-2a^3)^4 + (-2a^2)^6 - (-2a^4)^3 + (2a^6)^2$.

95. $(-\frac{2}{3})^{-3} + [(-\frac{3}{2})^2]^2$.

96. $(-1)^5 \cdot (-2)^3 - (-3)^4 \cdot (-4)^3$.

97. Calcular $x^4+10x^3+35x^2+30x+24$ para $x=-1$, $x=-2$, $x=-3$ y $x=-4$.

98. $(a-b)^4 : (b-a)^4 + (a-2b+3c)^5 : (2b-3c-a)^5$.

CAPITULO XI

RAICES.

62. Definición.—Calcular el valor de la incógnita x en la ecuación $x^2=9$ es buscar un número que elevado al cuadrado, es decir, que multiplicado por sí mismo, sea igual a 9. Este número es +3 y —3, porque $(+3)^2=9$ y $(-3)^2=9$.

El valor de x se anota así:

$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

y se lee *x igual a más menos raíz cuadrada de 9.*

En la ecuación:

$$x^n = c$$

se trata de buscar un número *x* que elevado a *n*, sea igual a *c*. El valor de x se indica así:

$$x = \sqrt[n]{c}$$

y se lee *x igual a raíz n de c.*

La operación que se ejecuta para determinar el valor de x en estas dos ecuaciones, se llama

extracción de raíz y consiste en *calcular la base de una potencia conocida, conociendo también el exponente.*

La potencia conocida se llama *cantidad subradical* o *radicando* (9 y c en los ejemplos); el exponente es el *grado* o *índice de la raíz* (2 y n), y la base que se busca, o sea el resultado de la operación se llama *raíz* (± 3 y $\sqrt[n]{c}$). El signo de la extracción de raíz es $\sqrt{\ }$ (radical). El índice 2 no se escribe y la raíz de índice 2 se llama *raíz cuadrada.*

Así $\sqrt{a}$ se lee *raíz cuadrada de a.*

La raíz de índice 3 se llama *raíz cúbica.*

La extracción de raíz es una operación inversa o contraria de la elevación a potencia. Por esto un número no altera si se extrae raíz y se le eleva a potencia de exponente igual al índice de la raíz; por consiguiente, las identidades que siguen contienen la definición de raíz.

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = \sqrt[3]{5^3} = 5$$
$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a$$

1. Escribir: raíz cuadrada de 16, raíz cúbica de 8, raíz cuarta de 16, raíz quinta de 32.

¿Qué significa cada una de estas raíces?

¿Cuál es el valor de cada una de ellas?

Nombrar el radicando, el índice y la raíz en cada ejemplo y nombrar también el término correspondiente de la elevación a potencia.

2. $5^2=25$, $\sqrt{25}=\pm 5$. Anotar los cuadrados de los números de 1 a 20; anotar y calcular la raíz cuadrada de cada uno de estos cuadrados.

Repetir el ejercicio oralmente en cualquier orden.

3. Anotar los cubos de los números de 1 a 10; anotar y calcular la raíz cúbica de cada uno de estos cubos.

Repetir el ejercicio en cualquier orden

4. Indicar el valor de x, y, z, u, t, en las igualdades:

$$x^3=p,\quad y^4=h,\quad z^m=c,\quad u^b=f,\quad t^p=a.$$

5. El cuadrado de x es 81. ¿Cuánto vale x? El cubo de y es 1 000. ¿Cuánto vale y? La cuarta potencia de z es m. ¿Cuánto vale z? La décima potencia de x es u. ¿Cuánto vale x?

6. ¿A cuánto es igual 3^4, si $\sqrt[4]{81}=3$? ¿A cuánto es igual 21^2, si $\sqrt{441}=21$?

¿A cuánto es igual m^n, si $\sqrt[n]{y}=m$?

7. Calcular $\sqrt{169-25}$; $\sqrt{169}-\sqrt{25}$, $\sqrt{64+36}$, $\sqrt{64}+\sqrt{36}$.

8. Descomponer 256 en ocho factores iguales entre sí. ¿Cuál es el factor?

9. ¿Qué número elevado a 6 es 15 625?

10. ¿A cuánto es igual $\sqrt[1]{3}$, $\sqrt[4]{1}$, $\sqrt[5]{8^5}$, $(\sqrt[3]{7})^3$?

11. $\sqrt{a}\,.\,\sqrt{a}$; $\sqrt[3]{a}\,.\,\sqrt[3]{a}\,.\,\sqrt[3]{a}$.

12. ¿Por qué número se debe multiplicar $\sqrt{3}$ para obtener 3? ¿Idem $\sqrt{x}$ para obtener x?

13. ¿A qué es igual $\dfrac{a}{\sqrt{a}}$, $\dfrac{b-c}{\sqrt{b-c}}$?

14. ¿Cuál es el cuadrado de $\sqrt{5}$, de $\sqrt{m}$, de $3\sqrt{2}$, de $5\sqrt{7}$, de $6\sqrt{10}$, de $4\sqrt{a}$?

15. Calcular: $(8+\sqrt{11})\,(8-\sqrt{11})$;
$(\sqrt{15}+\sqrt{7})\,(\sqrt{15}-\sqrt{7})$;
$(5\sqrt{2}+4\sqrt{3})\,(5\sqrt{2}-4\sqrt{3})$.

16. Desarrollar: $(10+\sqrt{3})^2$; $(7-\sqrt{10})^2$; $(15-6\sqrt{5})^2$.

17. Descomponer x—y en un producto de dos factores binomiales.

18. $\sqrt[3]{a^3}-\sqrt{b^2}+(\sqrt[5]{c})^5+\sqrt[4]{b^4}-$
$-[(\sqrt{d})^2-(\sqrt{d^2}-\sqrt[3]{b^3})]$.

19. $$\sqrt[3]{\left(\frac{6a-3b}{5a-2b}\right)^3}+\left(\sqrt[7]{\frac{7b-13a}{15a-6b}}\right)^7;$$
$(\sqrt{x^3+y^3})^2 : \sqrt{(x+y)^2}$.

20. La superficie de un cuadrado es:
a) 100 m²; b) 196 m²; c) 324 m²; d) 400 m². Calcular la longitud del lado.

21. La altura de un triángulo, cuya superficie es 361 m², es la mitad de la base. Calcular la base y la altura.

22. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 25 m y uno de los catetos mide 20 m. ¿Cuántos metros mide el otro cateto?

63. Extraer raíz de un producto.

$\sqrt{16 . 9} = \sqrt{144} = 12$	$ab = (\sqrt[n]{a})^n . (\sqrt[n]{b})^n$ (Def.)
$\sqrt{16} . \sqrt{9} = 4 . 3 = 12$	$= (\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b})^n$ (N.° 58)
	Extrayendo raíz n resulta:
$\sqrt{16 . 9} = \sqrt{16} . \sqrt{9}$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b}$; luego

Teorema I.— *Para extraer raíz de un producto, se extrae raíz de cada uno de los factores y se multiplican las raíces que resultan.*

1. $\sqrt{4 . 9}$; $\sqrt[3]{8 . 27}$; $\sqrt{a^2b^2}$.
2. $\sqrt{16 . 121 . 400}$; $\sqrt[3]{8 . 27 . 125}$.
3. $\sqrt{4a^2} + \sqrt{9a^2} + \sqrt{16a^2}$.
4. $\sqrt{49a^2} + \sqrt{25b^2} - \sqrt[3]{216a^3} - \sqrt[3]{64b^3}$
5. $4\sqrt[3]{343x^3} - 5\sqrt{36y^2} - 3\sqrt{81x^2} + 6\sqrt[3]{125y^3}$
6. $2\sqrt{121p^2} - 4\sqrt[3]{512q^3} - 7\sqrt[4]{81p^4} + 16\sqrt[6]{64q^6}$
7. $\sqrt{(x^2 - 2xy + y^2)\ (a+b)^2}$.
8. $\sqrt{4a}$; $\sqrt{9x}$; $\sqrt[3]{8y}$; $\sqrt{16z}$.
9. $\sqrt{12}$; $\sqrt{18}$; $\sqrt{27}$; $\sqrt{20}$.
10. $\sqrt{75}$; $\sqrt{32}$; $\sqrt{50}$; $\sqrt{72}$.

11. $\sqrt[3]{16}$; $\sqrt[4]{81}$; $\sqrt[3]{128}$; $\sqrt[3]{625}$.
12. (1) $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{288} + \sqrt{338}$.
13. $\sqrt{3} + \sqrt{243} + \sqrt{75} + \sqrt{192} + \sqrt{507}$.
14. $\sqrt{5} + \sqrt{20} + \sqrt{125} + \sqrt{1\,445}$.
15. $3\sqrt{8} + 2\sqrt{32} + 7\sqrt{50} - 6\sqrt{162} + 9\sqrt{98} +$
 $+ 7\sqrt{242}$.

16. $\sqrt{\tfrac{1}{3}} = \sqrt{\tfrac{1}{9} . 3} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}$. Transformar del mismo modo y reducir: $\sqrt{2} + \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{8}$; $\sqrt{5} - 2\sqrt{\tfrac{1}{5}} + \sqrt{20}$; $\sqrt{1\tfrac{1}{3}} + 5\sqrt{5\tfrac{1}{3}} - 3\sqrt{8\tfrac{1}{3}}$.

64. Multipilcar raices del mismo índice.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} \qquad \text{(Teor. I).}$$

Cambiando el orden de los miembros de la igualdad, se tiene:

$$\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}; \text{ luego}$$

Teorema II.—*Para multiplicar raíces del mismo índice, se extrae raíz del producto de las cantidades subradicales.*

1. $\sqrt{2} . \sqrt{18}$; $\sqrt{50} . \sqrt{2}$; $\sqrt{3} . \sqrt{27}$
2. $\sqrt{6} . \sqrt{24}$; $\sqrt{2\tfrac{2}{3}} . \sqrt{24}$; $\sqrt{4\tfrac{1}{2}} . \sqrt{32}$.

---

(1) Las raíces son términos semejantes cuando tienen el mismo índice y la misma cantidad subradical, y entonces se pueden reducir.

3. $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9};\ \sqrt[3]{16}\cdot\sqrt[3]{4};\ \sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{125}.$

4. $\sqrt{3a}\cdot\sqrt{12a};\ \sqrt{5y}\cdot\sqrt{20y};\ \sqrt[3]{12x}\cdot\sqrt[3]{18x^2}.$

5. $\sqrt{6}\,(\sqrt{24}+\sqrt{8});\ (\sqrt{28}-\sqrt{35})\cdot\sqrt{7}.$

6. $\sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}};$

$\sqrt[3]{6\sqrt{3}+9}\cdot\sqrt[3]{6\sqrt{3}-9}.$

7. $\sqrt{\sqrt{23}+\sqrt{7}}\cdot\sqrt{\sqrt{23}-\sqrt{7}};$

$\sqrt[6]{5\sqrt{2}+7}\cdot\sqrt[6]{5\sqrt{2}-7}.$

8. $\sqrt[3]{\sqrt{12}-2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{12}+2};$

$\sqrt[3]{7+\sqrt{22}}\cdot\sqrt[3]{7-\sqrt{22}}.$

9. $(\sqrt{12}+\sqrt{6})^2;\ (\sqrt{18}-\sqrt{8})^2.$

10. $(3\sqrt{6}+4\sqrt{8})^2;\ (7\sqrt{12}-6\sqrt{3})^2.$

11. $(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2;\ (\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}})^2.$

12. $(\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}})^2.$

13. $(\sqrt{a+b+\sqrt{4ab}}-\sqrt{a+b-\sqrt{4ab}})^2.$

14. $\sqrt[3]{\dfrac{x-y}{x^2+2xy+y^2}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x+y}}+\dfrac{4xy}{x^2-y^2}.$

15. $(\sqrt{6}+\sqrt{12})\,(\sqrt{3}-\sqrt{2}).$

16. $(\sqrt{7}+\sqrt{3}+\sqrt{2})\,(\sqrt{7}-\sqrt{3}+\sqrt{2}).$

17. $(2\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2})\,(2\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}).$

18. $(\sqrt{12}+\sqrt{18}+\sqrt{24})\,(\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{24}).$

19. $(5+2\sqrt{10}+\sqrt{15})\,(3-2\sqrt{6}+\sqrt{15}).$

20. $(4+\sqrt{6}+\sqrt{22})\,(3+2\sqrt{6}-\sqrt{33}).$

21. $\sqrt{a^2-b^2}\cdot\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}};\ \sqrt{6x^2-6}\cdot\sqrt{\dfrac{3x+3}{2x-2}}.$

65. Números irracionales.

Sea *a* un número entero. Una raíz de *a* no puede ser una fracción. En efecto, si $\sqrt{a}$ fuera igual a una fracción irreductible, por ejemplo, $\dfrac{x}{y}$, se tendría:

$$\sqrt[n]{a}=\frac{x}{y}.$$

Elevando los dos miembros a la potencia de exponente n, resultaría:

$$a=\frac{x^n}{y^n}$$

lo que es imposible, porque un número entero no puede ser igual a una fracción; luego

Teorema III.—*La raíz de un número entero no puede ser una fracción, sino un número entero o un número irracional (inconmensurable).*

La raíz de un número que no es potencia exacta es un número *irracional*, que se escribe en forma de una fracción decimal de infinito número de cifras decimales que no se repiten en grupos o períodos. La raíz exacta de un número es un número *racional.*

$\sqrt{2}$ es un número irracional; $\sqrt{4}$ es un número racional.

66. Aplicaciones del teorema II.

1.ª Colocar en la cantidad subradical el coeficiente de una raíz.

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}.$$

El coeficiente de una raíz se puede colocar como factor de la cantidad subradical, elevándose a potencia de exponente igual al índice de la raíz.

2.ª Hacer racional el denominador de una fracción.

1.er ejemplo: $$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}.$$

2.º ejemplo: $$\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})\,(\sqrt{b} - \sqrt{c})}$$

$$= \frac{a\sqrt{b} - a\sqrt{c}}{b - c}.$$

3.er ejemplo: $$\frac{a}{\sqrt{b} - \sqrt{c}}$$

$$= \frac{a(\sqrt{b} + \sqrt{c})}{(\sqrt{b} - \sqrt{c})\,(\sqrt{b} + \sqrt{c})}$$

$$= \frac{a\sqrt{b} + a\sqrt{c}}{b - c}.$$

1. $6\sqrt{\frac{1}{3}}$, $15y\sqrt{\frac{3x}{5y}}$, $24x^2\sqrt{\frac{1}{6x^4}}$

2. $m\sqrt{\frac{1}{m}}$, $3a\sqrt{\frac{5}{12}}$.

3. $a\sqrt{\frac{b}{a}}$, $(x+y)\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+2xy+y^2}}$

4. $x\sqrt[3]{\frac{a}{x^3}}$, $2\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$, $3\sqrt[3]{\frac{5}{9}}$.

5. $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$;

$(\sqrt{5} + \sqrt{2}) \cdot \sqrt{7 - 2\sqrt{10}}$.

6. $(2+\sqrt{3}) \cdot \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$;

$(7+\sqrt{5}) \cdot \sqrt{54 - 14\sqrt{5}}$.

Hacer racional el denominador de:

7. $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{3\sqrt{3}}$, $\frac{5}{\sqrt{5}}$.

8. $\frac{5+\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$, $\frac{3-\sqrt{27}+\sqrt{8\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}}$.

9. $\dfrac{6}{2+\sqrt{2}}$, $\dfrac{1}{3-\sqrt{2}}$, $\dfrac{12}{3+\sqrt{5}}$, $\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}$.

10. $\dfrac{41}{13-\sqrt{5}}$, $\dfrac{6}{\sqrt{11}+3}$, $\dfrac{27}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}$,

$\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

11. $\dfrac{\sqrt{18}-\sqrt{8}}{\sqrt{18}+\sqrt{8}}$, $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

12. $\dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$, $\dfrac{5\sqrt{7}+6\sqrt{10}}{5\sqrt{1,75}+6\sqrt{2,5}}$.

13. $\dfrac{4}{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}$. $\dfrac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

14. $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$, $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{7}+\sqrt{8}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}-\sqrt{8}}$.

15. $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}}$, $\dfrac{x}{\sqrt[4]{x}}$, $\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, $\dfrac{a}{\sqrt[x]{a}}$.

67. Extraer raíz de un cuociente.

$$\sqrt{\frac{144}{16}}=\sqrt{9}=3$$

$$\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{16}}=\frac{12}{4}=3$$

$$\sqrt{\frac{144}{16}}=\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{16}}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}$$

$$=\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n \text{ (N.º 59).}$$

Extrayendo raíz n, resulta

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; \text{ luego}$$

Teorema IV.—*Para extraer raíz de un cuociente o de una fracción, se extrae raíz de cada uno de sus términos y se dividen las raíces que resultan.*

1. $\sqrt{\dfrac{4}{9}}$; $\sqrt{\dfrac{25}{81}}$; $\sqrt{\dfrac{100}{169}}$.

2. $\sqrt[3]{\dfrac{27}{64}}$; $\sqrt[3]{\dfrac{8a^3b^3}{c^3}}$; $\sqrt{\dfrac{25y^2}{169}}$.

3. $\sqrt{5\dfrac{1}{16}}$; $\sqrt{6\dfrac{19}{25}}$; $\sqrt{5\dfrac{11}{49}}$.

4. $\sqrt{5+\dfrac{1}{16}}$; $\sqrt{8-\dfrac{4}{25}}$; $\sqrt{\dfrac{5}{18}+\dfrac{5}{12}}$.

5. $\sqrt{\frac{3}{16}}$; $\sqrt{\frac{18}{25}}$; $\sqrt{\frac{86 \cdot 25 \cdot 18 \cdot 43}{152 \cdot 30 \cdot 27 \cdot 95}}$

6. $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} + \sqrt[3]{\frac{64}{125}} - 4\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} - 2\sqrt[3]{2\frac{10}{27}} +$

$+3\sqrt[3]{1\frac{61}{64}}$.

7. $\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}} - \sqrt[5]{\frac{1}{(a-b)^5}}$.

8. $\sqrt{\frac{x+y}{x^2+2xy+y^2}} + \sqrt{\frac{x-y}{x^2-2xy+y^2}}$.

9. $\sqrt{\sqrt[3]{\frac{25^3}{64^3}}} + \sqrt[3]{\sqrt{\frac{8^2}{27^2}}} - \sqrt[3]{\sqrt[x]{\frac{27^x}{125^x}}}$.

10. $\sqrt{\frac{2(a^2+b^2)^2}{c^2} - \frac{2(a^2-b^2)^2}{c^2}}$.

11. $\sqrt{xy} : \left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}}\right)$.

68. Dividir raíces del mismo índice.

Del teorema IV se deduce:

$$\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{16}} = \sqrt{\frac{144}{16}}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}; \text{ luego}$$

Teorema V.—*Para dividir raíces del mismo índice, se extrae raíz del cuociente de las cantidades subradicales.*

1. $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{112}}{\sqrt{7}}$; $\frac{\sqrt{a^3m}}{\sqrt{am}}$.

2. $\sqrt{25x} : \sqrt{x}$; $\sqrt{32a^3b^4} : \sqrt{2ab}$.

3. $\sqrt{15} : \sqrt{\frac{3}{5}}$; $\sqrt{21} : \sqrt{\frac{3}{7}}$; $\sqrt{30} : \sqrt{\frac{5}{6}}$.

4. $\sqrt{ab} : \sqrt{\frac{a}{b}}$; $x\sqrt{y} : \sqrt{\frac{x}{y}}$.

5. $(\sqrt{3\frac{1}{3}x^2} - \sqrt{37\frac{1}{2}y^2}) : \sqrt{\frac{5}{6}}$.

6. $\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a-b}} + \frac{\sqrt{(a+b)^3}}{\sqrt{(a+b)^2}}\right) : \sqrt{a+b}$.

7. $(\sqrt{75} - \sqrt{12}) : \sqrt{3}$;

$(\sqrt{72} + \sqrt{108} - \sqrt{300}) : \sqrt{6}$.

8. $(\sqrt{50} + \sqrt{512} - \sqrt{722}) : \sqrt{2}$.

9. $(9\sqrt[3]{24} + 6\sqrt[3]{81} - 3\sqrt[3]{192} + 12\sqrt[3]{375}) : 3\sqrt[3]{3}$.

10. $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{153}}{\sqrt{17}} - \dfrac{\sqrt{304}}{\sqrt{19}} + \dfrac{\sqrt{105}}{\sqrt{2\frac{1}{7}}}$.

11. $\sqrt[5]{\dfrac{a^4x^{-3}}{y^2}} : \sqrt[5]{\dfrac{x^2y^{-3}}{a}} + \sqrt[6]{\dfrac{x^{-1}b^4}{z^3}} : \sqrt[6]{\dfrac{x^5z^{-3}}{b^2}}$.

69. Raíz de una potencia.

$\sqrt[n]{a^4} = \sqrt[n]{aaaa}$ (Def. de potencia)

$= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a}$ (N.° 63)

$= \sqrt[n]{(a)^4}$ (Def. de potencia): luego

Teorema VI.—*Para extraer raíz de una potencia se extrae raíz de la base y se eleva esta raíz al exponente de la potencia.*

Según la definición de raíz, se tiene:

(1) $(\sqrt[n]{a^4})^n = a^4$

Ahora como $\frac{4}{n} \cdot n$ es 4, se puede escribir:

(2) $\left(a^{\frac{4}{n}}\right)^n = a^4$ (N.° 60).

Las igualdades (1) y (2) tienen los segundos miembros iguales, los primeros también lo son; por consiguiente:

$$\left(\sqrt[n]{a^4}\right)^n = \left(a^{\frac{4}{n}}\right)^n$$

Se extrae raíz de los dos miembros y resulta:

$$\sqrt[n]{a^4} = a^{\frac{4}{n}};\ \text{luego}$$

Teorema VII.—*Toda raíz de una potencia es igual a la base de la potencia elevada al exponente partido por el índice de la raíz.*

Este teorema es aplicable en el cálculo solamente cuando el exponente de la potencia es divisible por el índice de la raíz; en el caso contrario resulta una potencia con exponente fraccionario.

Una potencia con exponente fraccionario se define como una raíz de índice igual al denominador del exponente y cuya cantidad subradical es la base elevada al numerador.

Así, $8^{\frac{2}{3}}$ representa a $\sqrt[3]{8^2}$

Este cambio de escritura de una raíz de potencia en una potencia de exponente fraccionario, explica la *amplificación y simplificación* de una raíz.

En efecto, se tiene:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m.x}{n.x}} = \sqrt[nx]{a^{mx}}$$

$$y \ \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m:x}{n:x}} = \sqrt[n:x]{a^{m:x}}$$

¿Cómo se amplifica y se simplifica una raíz?

1. $\sqrt{4^3}$ $\quad \sqrt[3]{8^3}$ $\quad \sqrt[4]{16^2}$.

2. $\sqrt{36^2}$ $\quad \sqrt{64^3}$ $\quad \sqrt{81^3}$.

3. $\sqrt[3]{125^2}$ $\quad \sqrt[3]{729^2}$ $\quad \sqrt[3]{27^4}$.

4. $\sqrt{25^3} - \sqrt[3]{8^4} + \sqrt[4]{16^2}$.

5. $\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^3} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{27}{64}\right)^2}$; $\sqrt[3]{\left(\frac{27}{64}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{125}{64}\right)^2}$

6. $\sqrt[3]{8^7} + \sqrt{25^2} + \sqrt[3]{64^8}$.

7. $\sqrt[3]{27^4} - \sqrt[4]{81^3} + \sqrt[3]{125^2} - \sqrt{16^3} - 3\sqrt{25}$.

8. $\sqrt{(a^2+2ab+b^2)^3} + \sqrt{(a^2-2ab+b^2)^3}$;

$$\sqrt{\left(\frac{16}{25}\right)^7} \cdot \sqrt{\left(\frac{25}{64}\right)^4}$$

9. $\sqrt{a^4}$ $\quad \sqrt[3]{a^9}$ $\quad \sqrt[n]{a^{2n}}$.

10. $\sqrt[3]{(x-y)^6}$ $\quad \sqrt[4]{(a-b)^{12}}$.

11. $\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[6]{a^7}$; $\quad \sqrt[4]{b^3} \cdot \sqrt[4]{b^5}$.

12. $\sqrt[6]{x^{13}} : \sqrt[6]{x}$; $\quad \sqrt[n]{a^{3n+1}} : \sqrt[n]{a}$.

13. $\sqrt[3n]{a^7} : \sqrt[3n]{a^{7-6n}}$.

---

14. $a^{\frac{1}{2}}$, $\quad 27^{\frac{1}{3}}$, $\quad \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\quad \left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}$.

15. $16^{\frac{3}{4}}$, $\quad 64^{\frac{5}{6}}$, $\quad 32^{\frac{3}{5}}$.

16. $343^{\frac{2}{3}}$, $\quad 512^{-\frac{2}{3}}$, $\quad 343^{-\frac{1}{3}}$.

17. $4^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{3}}$; $\quad 72^{\frac{1}{2}} : 8^{\frac{1}{2}}$; $\quad 96^{\frac{1}{5}} : 3^{\frac{1}{5}}$

18. $100^{0,5} + 81^{0,25} - 16^{0,75}$.

19. $16^{\frac{1}{2}} + 8^{\frac{2}{3}} + 16^{\frac{3}{4}} + 125^{\frac{1}{3}} - 512^{\frac{2}{3}} + 100^{0,5} + 81^{0,75}$.

20. $7^{\frac{3}{4}} \cdot 7^{\frac{3}{2}} \cdot 7^{\frac{7}{4}} + 16^{\frac{20}{17}} \cdot 16^{\frac{5}{17}} \cdot 16^{\frac{1}{34}}$.

---

21. Convertir las raíces $\sqrt[6]{a^5}$, $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[4]{a}$ y $\sqrt[8]{a^3}$ en otras del mismo valor y que tengan 24 por índice.

22. Convertir las raíces $\sqrt[3]{a^4}$, $\sqrt[5]{a^{12}}$, $\sqrt[7]{a^8}$ y $\sqrt[9]{a^{16}}$ en otras equivalentes, de modo que las cantidades subradicales tengan el mismo exponente.

23. $\sqrt[6]{a^5} : \sqrt[4]{a^3}$; $\sqrt[3]{x^3} \,.\, \sqrt[6]{x^2}$; $\sqrt[-2]{4}$.

24. $\sqrt[12]{a^5} : \sqrt[15]{a^7}$; $\sqrt[15]{x^8} : \sqrt[9]{x^4}$; $\sqrt[-3]{\frac{1}{27}}$.

25. $\sqrt[10]{2\frac{1}{3}} \,.\, \sqrt[12]{\frac{3}{7}}$; $\sqrt[3]{36} : \sqrt{6}$.

26. $\sqrt[\frac{3}{4}]{a^4} \,.\, \sqrt[\frac{5}{6}]{a^3}$; $\sqrt[\frac{2}{3}]{x^5} : \sqrt[\frac{3}{4}]{x^3}$; $\sqrt[-\frac{1}{2}]{2}$.

27. $(5\sqrt[\frac{1}{2}]{a}+4ab-3\sqrt[\frac{1}{2}]{2b}) : (a+2b)$.

---

28. $\sqrt[6]{a^{11}}$ $\qquad \sqrt[4]{x^6}$ $\qquad \sqrt[16]{x^{12}}$.

29. $\sqrt[25]{a^{10}}$ $\qquad \sqrt[8m]{a^{2m}}$ $\qquad \sqrt[20]{p^{15}}$.

30. $\sqrt[5]{x^{12}} : \sqrt[5]{x^2}$; $\sqrt[6]{a^{13}} : \sqrt[6]{a}$.

31. $5\sqrt[12]{a^{30}}+3\sqrt[14]{a^{35}}+9\sqrt[16]{a^{40}}-7\sqrt[18]{a^{45}}$.

32. $\sqrt[15]{a^7} \,.\, \sqrt[15]{a^3} + \sqrt[39]{a^{57}} : \sqrt[39]{a^{31}}$.

70. Raíz de una raíz.

$$\sqrt{\sqrt[3]{a}} = \sqrt{a^{\frac{1}{3}}} = (a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}.$$

En general: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$; luego

Teorema VIII.—*Para extraer raíz de una raíz se extrae raíz de la misma cantidad subradical, pero de índice igual al producto de los índices.*

Teorema IX.—Recíproco del anterior.

1. $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ $\qquad \sqrt{\sqrt{625}}$ $\qquad \sqrt{\sqrt[3]{729}}$

2. $\sqrt[4]{\sqrt{a}}$ $\qquad \sqrt[3]{\sqrt[3]{x}}$ $\qquad \sqrt[\frac{1}{2}]{\sqrt{49}}$

$$\sqrt[3]{\sqrt[6]{16}} \qquad \sqrt[\frac{1}{5}]{\sqrt[10]{\tfrac{16}{81}}} \qquad \sqrt[\frac{3}{4}]{\sqrt[4]{\tfrac{8}{27}}}.$$

4. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{16}} \qquad \sqrt[3]{\sqrt{125}} \qquad \sqrt{\sqrt[3]{\tfrac{49}{64}a^2b^4c^8}}.$

5. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}} + \sqrt[5]{\sqrt[4]{a^5}} - 2\sqrt[7]{\sqrt[4]{a^7}}.$

6. $2\sqrt[3]{\sqrt[4]{ab}} + \sqrt[6]{\sqrt{ab}} - 4\sqrt[4]{\sqrt[3]{ab}} + \sqrt{\sqrt[6]{ab}}.$

7. $\sqrt[9]{\sqrt[4]{a^7}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[12]{a^{13}}} \cdot \sqrt[6]{\sqrt[6]{a}}.$

8. $\sqrt[9]{\sqrt[5]{x^{11}}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[15]{x^{19}}} \cdot \sqrt{x}.$

9. $2\sqrt[12]{\sqrt[5]{7}} + 3\sqrt[6]{\sqrt[10]{7}} - 3\sqrt[5]{\sqrt[12]{7}} - \sqrt[10]{\sqrt[6]{7}}.$

10. $\sqrt[9]{\sqrt{\sqrt{x^6}}} + \sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^5}}} - \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{x^6}}} - \sqrt[3]{\sqrt[15]{x^5}}.$

11. $\sqrt{3\sqrt[3]{5}}\,; \qquad \sqrt{\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}}\,; \qquad \sqrt[x-1]{\dfrac{a}{\sqrt[x]{a}}}.$

12. $\sqrt[3]{5\sqrt[4]{7}}\,; \quad \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}.$

71. Signos de una raíz.

a) *Raíces de índice impar.*

Según la definición de extracción de raíz, la cantidad subradical corresponde a la potencia y la raíz a la base.

Una potencia de exponente impar tiene el signo de la base (N.° 61, 2.° caso). Recíprocamente, la base de una potencia de exponente impar debe tener el signo de la potencia; luego *La raíz de índice impar tiene el signo de la cantidad subradical* $\sqrt[3]{8} = +2$; $\sqrt[3]{-8} = -2$.

b) *Raíces de índice par.*

Hay que distinguir dos casos:

Primer caso. La cantidad subradical es positiva.

Toda potencia de exponente par de un número relativo es positiva (N.° 61, primer caso). Recíprocamente, la base (raíz) de una potencia positiva (cantidad subradical) es positiva y negativa; luego:

La raíz de índice par, cuya cantidad subradical es positiva, tiene dos valores reales iguales y de signos contrarios.

$$\sqrt{9} = \pm 3.$$

Segundo caso. La cantidad subradical es negativa.

Sea la $\sqrt{-9}$. El valor de esta raíz no puede ser $(+3)$ ni (-3), porque $(\pm 3)^2 = 9$ y no -9.

Se dice entonces que la *raíz de índice par de un número negativo es un número* **imaginario.** Las demás especies de números son **reales.**

La unidad imaginaria es $\sqrt{-1}$, y se designa por la letra *i*. Se define como una cantidad que *elevada al cuadrado* da por resultado -1.

Un número imaginario, como $\sqrt{-9}$, se escribe de modo que la parte imaginaria se exprese y anote como factor, a saber:

$$\sqrt{-9} = \sqrt{(-1) \cdot 9} = i\sqrt{9} = 3i.$$

En general, $\sqrt{-b} = \pm i\sqrt{b}$.

Los números imaginarios se representan sobre la perpendicular levantada en el punto cero del gráfico de los números reales.

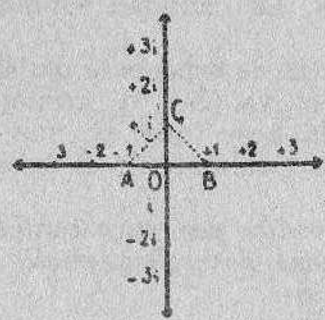


Fig. 11.

En la figura **11**, AO = OB = OC (unidad).

El triángulo ABC es rectángulo en C y OC es la altura a la hipotenusa; luego:

$$OC^2 = AO \cdot OB$$
$$OC^2 = (-1) \cdot (+1) = -1$$
$$OC = i = \sqrt{-1}.$$

Potencias de i:

$$i = \sqrt{-1}$$
$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$
$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = +1.$$

Estos valores se repiten para las potencias mayores que i^4; por ejemplo:

$$i^{18} = i^{16} \cdot i^2 = (+1) \cdot i^2 = -1$$
$$i^{23} = i^{20} \cdot i^3 = (+1) \cdot i^3 = -i.$$

Un número compuesto de una parte real y de otra **imaginaria** se llama complejo. $a + \sqrt{-b}$, o sea $a + i\sqrt{b}$, es un número complejo.

Dos números complejos compuestos de las mismas partes con diferencia de signo del término imaginario, por ejemplo, $a + i\sqrt{b}$ y $a - i\sqrt{b}$, se llaman *complejos conjugados*.

Si se suman dos números complejos conjugados o se multiplican, resulta un número real. En efecto:

1) $a + i\sqrt{b} + a - i\sqrt{b} = 2a$

2) $(a + i\sqrt{b})(a - i\sqrt{b}) = a^2 - i^2b = a^2 + b.$

La suma y el producto de dos números complejos conjugados son números reales.

1. $\sqrt[3]{8} \qquad \sqrt[3]{-8} \qquad \sqrt[5]{-32}.$

2. $\sqrt{4a^4b^8} + \sqrt[3]{-a^6b^{12}} - \sqrt[4]{a^8b^{16}}.$

3. $\sqrt[3]{-8(a-b)^6}; \qquad \sqrt[3]{-3\tfrac{3}{8}x^3}.$

4. $2\sqrt[3]{-64} - 2\sqrt[3]{-216} - (\tfrac{1}{8})^{-\frac{2}{3}}.$

5. $\sqrt[5]{-7\tfrac{19}{32}} - \sqrt[3]{-5\tfrac{23}{64}} + (\tfrac{8}{27})^{-\frac{2}{3}}.$

6. $\sqrt{-81} \qquad \sqrt{-121} \qquad \sqrt{-361}.$

7. $2\sqrt{-169}; \quad 3\sqrt{-289}.$

8. $\tfrac{1}{4}\sqrt{-256}; \quad \tfrac{2}{3}\sqrt{-81a^2}.$

9. $2\sqrt{-12} - 3\sqrt{-27}; \quad \sqrt{-25} + \sqrt{-4}.$

10. $\sqrt{-16} + \sqrt{-25} - \sqrt{-64} + 5\sqrt{-100}.$

11. $8\sqrt{-6\tfrac{1}{4}} - 15\sqrt{-1\tfrac{11}{25}}.$

12. $\sqrt{2ab-a^2-b^2} + \sqrt{-b^2}.$

13. $(16+2\sqrt{-12})-(6+6\sqrt{-27})-(8-2\sqrt{-147}).$

14. $i^7, i^{17}, i^{22}, i^{60}, i^{75}.$

15. $\sqrt{-9} \quad \sqrt{-\tfrac{1}{4}} - \sqrt{-16} \,.\, \sqrt{-\tfrac{1}{8}}.$

16. $(27\sqrt{-36} + 18\sqrt{-100} - 36\sqrt{-256}) :$
$9\sqrt{-4}.$

72. Extracción de raíz cuadrada.

Ejemplo: $\sqrt{4\,225}.$

Como 4 225 es menor que 10 000, la $\sqrt{4\,225}$ será menor que 100, es decir, tendrá dos cifras; luego esta raíz se puede expresar en la forma $a+b$, representando a las decenas y b las unidades; de manera que:

$$\begin{aligned} \sqrt{4\,225} &= a+b, \text{ por lo tanto,} \\ 4\,225 &= (a+b)^2 \\ &= a^2+2ab+b^2. \end{aligned}$$

Se busca, pues, para a el mayor número de decenas, cuyo cuadrado se aproxime, por defecto, a 4 225.

Como $60^2=3\,600$ y $70^2=4\,900$, se tiene que $a=\mathbf{60}$; por consiguiente:

$$4\,225=3\,600+120b+b^2.$$

De esta igualdad debemos determinar b. Si 3 600 (o en general a^2) se resta de 4 225, resulta:

$$\begin{array}{l} 4\,225=3\,600+120b+b^2 \\ 3\,600=3\,600 \\ \hline 625= \qquad\quad 120b+b^2. \end{array}$$

Como b significa unidades, b^2 debe ser menor que 120b; de manera que aproximadamente $625=120b.$

El valor aproximado de b se encuentra dividiendo 625 por 120 (en general por 2a, por ser 120b = 2ab). Para b = 5 resulta:

$$625 = 600 + 25$$

$$\text{o } 625 - 600 - 25 = 0$$

$$\mathbf{a = 60,\ b = 5}$$

$$\sqrt{4\,225} = 60 + 5 = 65$$

El desarrollo anterior puede anotarse en la forma siguiente:

$$\sqrt{4\,225} = \overbrace{60}^{a} + \overbrace{5}^{b}$$

$$\begin{array}{rl} 3\,600 & \underbrace{2a} \\ \hline 625 & : 120 \\ 625 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Suprimiendo los ceros, el cálculo es:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{42|25} = 65 \\ 36 \\ \hline 62'5 : 125 \\ 625 \\ \hline 0 \end{array}\right\} = \begin{array}{l} \sqrt{42|25} = \ \ 65 \\ \quad 6\,2'5 : 125 \\ \quad\ 00 \end{array}$$

Otro ejemplo:

1)

$$\begin{array}{l} \sqrt{45|96|84} = 678 \\ 36 \\ \hline 99'6 : 127 \\ 889 \\ \hline 1078'4 : 1\,348 \\ 10784 \\ \hline \quad 0 \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{l} \sqrt{45|96|84} = 678 \\ \quad 99'6 : 127 \\ \quad 1078'4 : 1\,348 \\ \qquad 0 \end{array}$$

Explicación, para el cálculo 2), que es el más abreviado. Se divide el número en porciones de dos cifras, desde la derecha. Se extrae raíz cuadrada de la primera porción de la izquierda.

Raíz cuadrada de 45 es 6 y sobran 9. A la derecha de esta resta se escribe la porción siguiente, 96, y se forma el número 996. Se separa la cifra de la derecha por una coma colocada arriba (99'6). El número de la izquierda de la cifra separada se divide por el doble de la raíz encontrada.

99 : 12 = 7. Se escribe esta cifra 7 a la derecha de la raíz y también a la derecha del divisor. Se multiplica 7 por 127 y el producto se resta de 996; la resta es 107.

A la derecha de esta resta 107 se escribe la porción siguiente, 84, y se forma 10 784. Se separa la última cifra (4) por una coma (1078'4) y el número 1 078 se divide por el doble de la raíz encontrada, por 134.

1 078 : 134 = 8. Se escribe 8 a la derecha de la raíz y también a la derecha del divisor. Se multiplica 8 por 1 348 y el producto se resta de 10 784; la resta es cero.

Comparando los cuadrados de dos números enteros consecutivos, por ejemplo, a y a+1, se tiene:

$$\begin{array}{r} (a+1)^2 = a^2+2a+1 \\ a^2 = a^2 \\ \hline (a+1)^2 - a^2 = 2a+1 \end{array}$$

De donde se deduce que *los cuadrados de dos números enteros consecutivos se diferencian en el doble del número menor más uno;* por esto, en la extracción de raíz cuadrada, *la resta debe ser menor que el doble de la raíz encontrada más uno.*

Si el número es decimal, la separación en grupos de a dos cifras se principia desde la coma a uno y otro sentido, completando con un cero, si el número de cifras decimales es impar. Se debe colocar la coma en la raíz al terminar la operación con la última porción entera.

Para calcular cifras decimales, se agrega a la resta dos ceros por cada cifra decimal que se calcule.

En la extracción de raíz cuadrada de un polinomio se procede de un modo análogo al seguido en la extracción de raíz cuadrada de un número, después de ordenar el polinomio.

Ejemplo:

$$\sqrt{16x^2+24xy+9y^2+16xz+12yz+4z^2} = 4x+3y+2z$$

$$\begin{array}{l} 16x^2 \\ \hline (24xy+9y^2) : (8x+3y) \\ 24xy+9y^2 \\ \hline (16xz+12yz+4z^2) : (8x+6y+2z) \\ 16xz+12yz+4z^2 \\ \hline 0 \end{array}$$

Ejercicios. 1.—Ejercicios orales de raíz cuadrada de los números comprendidos en el círculo numeral de 1 a 100, expresando las restas para los números que no sean cuadrados; por ejemplo: la raíz cuadrada de 58 es 7 y sobran 9.

Extraer raíz cuadrada de:

2.	256	576	784	841
3.	361	484	676	961
4.	1024	1849	2209	4096
5.	5476	7921	5625	9025
6.	12321	6889	9801	45796
7.	54756	61009	44944	258064
8.	185761	30276	751689	254016
9.	831744	116964	270400	654481
10.	3530641	5143824	4149369	
11.	68492176	84768849		
12.	34	278	1502 (calculando tres decimales).	
13.	86	413	2620	34867
14.	2	5	3	8
15.	13,69	44,89	9,61	201,64
16.	0,002916	0,982081		0,015876

17. $\frac{1}{4}$ $\frac{81}{100}$ $\frac{484}{529}$ $\frac{4761}{6889}$.

18. $\sqrt{\sqrt{38416}}$ $\sqrt{1046576}$ $\sqrt{6857,4961}$.

19. $\sqrt[4]{1031\frac{10}{81}}$; $\sqrt{25\frac{161}{256}}$; $\sqrt{35\sqrt{7\sqrt{30625}}}$.

20. $8\sqrt{2-\sqrt{2}}$; $\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

Extraer raíz cuadrada de los siguientes polinomios:

21. x^2-6x+9; $9a^2-30ab+25b^2$.
22. $49p^2-84pq+36q^2$; $49a^6-112a^3b^2+64b^4$.
23. $81a^2b^2-54ab^2c+9b^2c^2$; $\frac{4}{9}a^6-a^3x+\frac{9}{16}x^2$.
24. $9x^4-30x^3+67x^2-70x+49$.
25. $64a^4+144a^3b+a^2b^2-90ab^3+25b^4$.
26. $\frac{9}{16}x^4y^2+\frac{6}{5}x^3y+\frac{16}{25}x^2y^4$.
27. $\frac{9}{16}a^2-2\frac{1}{2}ab+\frac{25}{9}b^2+\frac{9}{10}ac-2bc+\frac{9}{25}c^2$.

73. Ecuaciones irracionales.

$$\sqrt{x}+\sqrt{5+x}=\frac{15}{\sqrt{5+x}}.$$

Por ser una ecuación con fracción, se multiplica por $\sqrt{5+x}$:

$$\sqrt{x(5+x)}+5+x=15.$$

Se aisla el radical:

$$\sqrt{x(5+x)}=10-x.$$

Se eleva la ecuación al cuadrado:

$$5x+x^2=100-20x+x^2$$
$$25x=100$$
$$x=4.$$

Tratándose de raíces aritméticas, en la comprobación, deben considerarse con el signo que las precede y no con $\pm$ (en el caso de raíces cuadradas). Por ejemplo, la ecuación

$$9-\frac{3}{4}\sqrt{7x}=30 \qquad (1)$$

no tiene solución porque al ser resuelta en la forma indicada da $x=112$, solución que satisface a la ecuación

$$9+\frac{3}{4}\sqrt{7x}=30 \qquad (2)$$

y no a la propuesta. En efecto, aislando el radical y elevando al cuadrado, dan el mismo resultado

$$7x=28^2. \qquad (3)$$

La solución $x=112$ corresponde a la ecuación (3), más general que las ecuaciones (1) y (2) porque las incluye.

1. $\sqrt{x}=3$; $\sqrt[3]{x}=2$; $\sqrt{x}=a$.
2. $\sqrt{x-5}=2$; $7-\sqrt{x}=-8$.
3. $\sqrt{2x}+11=9$; $10+\sqrt{5x}=15$.
4. $4\sqrt{3x}=24$; $\frac{1}{3}\sqrt{4x}=12$.
5. $7+5\sqrt{6x}=67$; $9-\frac{3}{4}\sqrt{7x}=30$.

6. $3\sqrt{15-x}+5=17$; $\sqrt{\frac{3(4x+7)}{2}}=6$

7. $\sqrt{(x+1)(x+6)}-x=3$.

8. $\sqrt{(x-5)(4x+4)}+6=2x$.

9. $4x-\sqrt{(2x+5)(8x-7)}+7=6$.

10. $(7-\sqrt{x})(8-\sqrt{x})=x+11$.

11. $(3\sqrt{x}-5)(5\sqrt{x}-3)=5(3x-31)$.

12. $(\sqrt{x}-7)(\sqrt{x}-3)=(\sqrt{x}-6)(\sqrt{x}-5)$.

13. $(\sqrt{9x}-6)(\sqrt{x}+25)=(5+3\sqrt{x})(\sqrt{x}+3)$.

14. $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+6}$; $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\frac{3}{2}$.

15. $\frac{5\sqrt{x}+13}{7\sqrt{x}+5}=\frac{3}{2}$ $\frac{11-\sqrt{25x}}{27-5\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-4}$.

16. $\sqrt{3x}-\sqrt{2x}=1$.

17. $\sqrt{3x}-3\sqrt{2}=\sqrt{2x}-2\sqrt{3}$.

18. $\sqrt{6x}-3\sqrt{2}=\sqrt{6}-\sqrt{2x}$.

19. $\sqrt{ax}-a\sqrt{b}=\sqrt{bx}-b\sqrt{a}$.

20. $\sqrt{10+\sqrt{5x+1}}=4$; $\sqrt{12-3\sqrt{2x-5}}=3$.

21. $\sqrt{4+2\sqrt{7x+1}}=4$; $\sqrt{37-7\sqrt{5x+4}}=4$.

22. $\sqrt{6x+4+\sqrt{x^4+10x^2+3x+10}}=x+3$.

23. $\sqrt{6+\sqrt{4+\sqrt{x+2}}}=3$.

24. $\frac{17-5\sqrt{x}}{11}=-3$; $\frac{3+\sqrt{x}}{5}+\frac{1+\sqrt{x}}{3}=2$.

25. $\frac{2}{3}\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x}-\sqrt{x}+\frac{3}{4}\sqrt{x}=8\frac{1}{4}$.

26. $\frac{3\sqrt{x}-5}{2}-\frac{2\sqrt{x}-7}{3}=\sqrt{x}-1$.

27. $\frac{16-\sqrt{x}}{2}-\frac{10-\sqrt{x}}{3}=\sqrt{x}$.

28. $\frac{2\sqrt{x}+4}{5}-\frac{7-6\sqrt{x}}{6}-\frac{8\sqrt{x}+1}{15}=0$.

29. $\sqrt{7x+5}=\frac{9x-7}{\sqrt{7x+5}}$.

30. $\sqrt{x+4}=\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$

31. $\frac{3x-1}{\sqrt{3x}+1}=1+\frac{1}{2}(\sqrt{3x}-1)$ (1).

32. $3\sqrt{2x-1}-\sqrt{8x+17}=\frac{2(x-3)}{\sqrt{2x-1}}$.

33. $5\sqrt{2x+3}-\sqrt{18x-5}=\frac{4(x+3)}{\sqrt{2x+3}}$.

34. $\sqrt{12x-11}+\sqrt{3x+16}=\frac{9x+27}{\sqrt{3x+16}}$.

(1) $3x-1=(\sqrt{3x}+1)(\sqrt{3x}-1)$.

35. $\sqrt{a-x}-\sqrt{b-x} = \dfrac{a-b}{\sqrt{b-x}}$.

36. $\sqrt{x} + \sqrt{2+x} = \dfrac{4}{\sqrt{2+x}}$.

37. $\sqrt{x+9}-\sqrt{x}=1$.

38. $\sqrt{x+7}-\sqrt{x-5}=2$.

39. $\sqrt{x+5}+\sqrt{x-6}=11$.

40. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+8}=9$.

41. $\sqrt{9x-17}-3\sqrt{x-4}=1$.

42. $\sqrt{9x+10}-3\sqrt{x-1}=1$.

43. $2\sqrt{9x+4}-3\sqrt{4x-11}=5$.

44. $\sqrt{4x+9}-\sqrt{x-1}=\sqrt{x+6}$.

45. $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-3}=\sqrt{4x+1}$.

74. Ecuaciones exponenciales.

Una ecuación se llama *exponencial* cuando la incógnita está como exponente.

En este parrafo se trata solamente de ecuaciones exponenciales que pueden reducirse a ecuaciones de primer grado.

La resolución de estas ecuaciones se funda en el siguiente principio, aplicado en sentido aritmético:

Dos potencias iguales y de igual base tienen sus exponentes iguales. La regla no es aplicable para potencias que tienen la base cero, uno o infinito.

Ejemplo:

$$\left(\sqrt{a^{3-4x}} : \sqrt[5]{a^{6-7x}}\right) \cdot a^{4,5}=1$$

Anotando las raíces como potencias se tiene:

$$\left(a^{\frac{3-4x}{2}} : a^{\frac{6-7x}{5}}\right) \cdot a^{4,5}=1.$$

Aplicando los teoremas correspondientes sobre potencias, se tiene:

$$a^{\frac{3-4x}{2}-\frac{6-7x}{5}+\frac{45}{10}}=a^0$$

Según el principio anotado, resulta:

$$\frac{3-4x}{2}-\frac{6-7x}{5}+\frac{45}{10} = 0$$

$$15-20x-12+14x+45=0$$
$$6x=48$$
$$x=8.$$

1. $a^x=a^7$; $a^{x+3}=a^8$.
2. $b^{7-x}=b^3$; $3^x=1$.
3. $2^{x-1}=1$; $4^{3-x}=4$.
4. $p^{5-x}=p$; $q^{x+1}=q$.
5. $m^{8x-5}=m^{5x+7}$; $c^x \cdot c^{x-3}=c^9$.
6. $b^{x-1} \cdot b^{x+1}=b^8$; $a^{5x-3}=a^{14+5x} \cdot a^{8x+7}$.
7. $(4\frac{4}{5})^{x-6} \cdot (1\frac{7}{8})^{x-6}=9^{9-4x}$.
8. $(4\frac{4}{9})^{\frac{x}{4}-5} : (1\frac{13}{27})^{\frac{x}{4}-5} = 3$.
9. $(m^3)^x=m^{18}$; $(a^{x-1})^{x-7}=(a^{x+1})^{x+3}$.
10. $(a^{5x+1})^5=(a^{7x-1})^7 \cdot (a^{x-6})^9$.

11. $4^x = 64;\quad 5^x = 125;\quad 9^x = 81.$

12. $3^{-x} = 9;\quad 6^{-x} = 216;\quad 6^x = \frac{1}{36}.$

13. $(\frac{1}{4})^x = 8;\quad (\frac{1}{7})^x = 343;\quad 0{,}25^x = 32.$

14. $(\frac{2}{3})^x = 3\frac{3}{8};\quad 2\frac{1}{4} = (3\frac{3}{8})^x.$

15. $64^{\frac{1}{x}} = 32;\quad 16^{\frac{2}{x}} = 8;\quad 27^{\frac{2}{x}} = 9.$

16. $4^{x-5} = (\frac{1}{8})^{8-x};\quad 32^{x-4} = 0{,}0625^{3x-12}.$

17. $\sqrt[3]{a^{5x-3}} = a^{x+5};\quad \sqrt[4]{a^{13x+5}} = a^{2x-5}.$

18. $\sqrt[3+x]{a^2} : a^2 = a^3;\quad c^3 \,.\, \sqrt[x]{c^{7+5x}} = (\sqrt[x]{c^2})^3.$

19. $\sqrt[20-x]{a^{x-2}} = \sqrt[46-x]{a^{x+20}}.$

20. $\sqrt[3x]{a^{3x+5}} = \sqrt[6]{a^7}.$

21. $\sqrt{a^{3-4x}} : (\sqrt[5]{a^{6-7x}} \,.\, a^{4,5}) = 1.$

22. $\sqrt[4]{a^{x-5}} = \sqrt[6]{a^{7x-3}} : \sqrt[6]{a^{43}}.$

23. $\sqrt{a^{7x-2}} : \sqrt[8]{a^{9x+6}} = a^4 \,.\, \sqrt[6]{a^{3x-24}}.$

24. $\sqrt[15]{a^{2x-3}} : \sqrt[20]{a^{4x-9}} =$

$$\sqrt[30]{a^{8x-27}} \,.\, \sqrt[24]{a^{81-6x}} : \sqrt[4]{a^9}$$

Logaritmos. Definición.— La igualdad $b^n = c$ da lugar a tres ecuaciones, conociendo dos de las tres cantidades que entran en ella.

1.ª Si c es la incógnita, que designamos por x, resulta:

$$x = b^n.$$

El cálculo del valor de x se obtiene ejecutando la operación llamada *elevación a potencia*.

2.ª Si b es la incógnita, resulta $x^n = c$, de donde se obtiene que:

$$x = \sqrt[n]{c}.$$

La operación que permite calcular el valor de x es la *extracción de raíz*.

3.ª Si n es la incógnita, resulta la ecuación $b^x = c$. Esta ecuación equivale al problema de calcular el exponente, conociendo la base y la potencia. El valor del exponente x se expresa diciendo que es el logaritmo de c respecto a la base b y se escribe:

$$x = {}^b\log c$$

que se lee: *x igual al logaritmo de c, base b.*

Logaritmo de un número respecto a cierta base es el exponente a que se debe elevar la base para obtener el número.

La operación que se ejecuta para calcular el valor de un exponente (logaritmo) se llama *operación logarítmica*.

La elevación a potencia tiene, según lo expuesto, dos operaciones inversas, la extracción de raíz y la operación logarítmica, mientras que la multiplicación y la adición tienen una, porque estas operaciones son conmutativas y la elevación a potencia no lo es. 3^2 no es igual a 2^3. Excepción $4^2 = 2^4$.

De la definición de logaritmo se deriva la equivalencia de las dos ecuaciones siguientes:

$$b^x = c \text{ y } x = {}^b\log c$$

Sistema de logaritmos.—El conjunto de los logaritmos de todos los números respecto de una misma base es un *sistema de logaritmos.*

En todo sistema de logaritmos cada número tiene un solo logaritmo, recíprocamente, a cada logaritmo corresponde un solo número. Por esto, la base de un sistema de logaritmos no puede ser la unidad, ni cero; tampoco conviene que sea un número negativo.

La base de un sistema de logaritmos debe ser, pues, un número positivo.

Los logaritmos de los números negativos con respecto a una base positiva son números complejos.

El sistema de Briggs.—En el cálculo ordinario se usa el sistema de los logaritmos ***vulgares*** o de *Briggs*, su autor, cuya base es 10. En los logaritmos de este sistema no se escribe la base; de manera que en vez de ***${}^{10}\log a$*** se escribe solamente *log a*.

Aplicando a este sistema las propiedades anteriores, resulta el cuadro siguiente:

$$\log 1 = 0, \text{ porque } 10^0 = 1$$
$$\log 10 = 1, \text{ porque } 10^1 = 10$$
$$\log 100 = 2, \text{ porque } 10^2 = 100$$
$$\log 1\,000 = 3, \text{ porque } 10^3 = 1\,000$$

. . . .

$$\log \infty = \infty, \text{ porque } 10^\infty = \infty$$
$$\log 0{,}1 = -1, \text{ porque } 10^{-1} = 0{,}1$$
$$\log 0{,}01 = -2, \text{ porque } 10^{-2} = 0{,}01$$
$$\log 0{,}001 = -3, \text{ porque } 10^{-3} = 0{,}001$$

. . . .

$$\log 0 = -\infty, \text{ porque } 10^{-\infty} = 0.$$

De donde se deduce que:

a) *Los logaritmos de potencias de diez mayores que la unidad, son números enteros y positivos y los logaritmos de las potencias de diez menores que la unidad, son números enteros y negativos.*

En ambos casos el logaritmo es igual al exponente. Si la potencia es mayor que 1, el logaritmo tiene tantas unidades como ceros tiene la potencia; si es menor que 1, el logaritmo tiene tantas unidades como cifras decimales tiene la potencia.

b) Los números que no son potencias de 10 están comprendidos entre dos potencias de este número; sus logaritmos estarán comprendidos entre los logaritmos de estas dos potencias límites. Si 264 es el número, resultan las relaciones que siguen:

$$100 < 264 < 1\,000$$
$$\log 100 < \log 264 < \log 1\,000$$
$$2 < \log 264 < 3$$

Como 264 es mayor que 100 y menor que 1 000, su logaritmo es mayor que 2 y menor que 3, es decir, se compone de 2 enteros y de una fracción.

En general, los logaritmos de los números que no son potencias de diez se componen de dos partes, una entera, llamada *característica* y otra parte fraccionaria escrita en forma decimal, llamada *mantisa*. La mantisa es un número de infinitas cifras y, por esto, los logaritmos se indican con aproximación de cierto número de cifras decimales.

CAPITULO XII

Ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

75. Una ecuación es de segundo grado cuando, después de hacer las reducciones posibles, el mayor exponente de la incógnita es 2.

Son ecuaciones de segundo grado:

1) $3x^2 = 48$

2) $6x^2 - 24x = 0$

3) $x^2 - 6x = 16$

La forma más general de una ecuación de segundo grado es:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

En esta ecuación a, b, c, representan valores conocidos y son los coeficientes de la ecuación.

Una ecuación de segundo grado está ordenada cuando sus términos están en un mismo miembro según las potencias descendentes de la incógnita.

El primer término contiene *el cuadrado de la incógnita;* el segundo contiene *la primera potencia de la incógnita;* y el tercero es el *término conocido.*

Si uno de los coeficientes b o c es cero, resultan ecuaciones *incompletas*.

El coeficiente a no puede ser cero, porque la ecuación dejaría de ser de segundo grado.

Si el coeficiente $b=0$, la ecuación general se convierte en la ecuación:

$$ax^2+c=0$$

que se llama *incompleta pura.*

76. Resolución de una ecuación de segundo grado incompleta pura.

Sea la ecuación:

$$6x^2=384.$$

Dividiendo los dos miembros de la ecuación por 6, resulta:

$$x^2=64.$$

Extrayendo raíz cuadrada, se tiene:

$$x = \pm 8$$

$$x'=8; \qquad x''=-8.$$

Los valores x' y x'' son las raíces o soluciones de la ecuación.

Una ecuación de segundo grado incompleta pura tiene, por lo tanto, dos raíces del mismo valor absoluto y de signo contrario.

Estas raíces pueden ser también imaginarias, por ejemplo:

$$x^2=-48$$

$$x = \pm 4i\sqrt{3}.$$

Ejercicios:

1. $x^2=100$ $\qquad x^2=121.$
2. $x^2=225$ $\qquad x^2=289$ $\qquad x^2=441.$
3. $x^2=1225$ $\qquad x^2=2425$ $\qquad x^2=5476.$
4. $x^2=50$ $\qquad x^2=180$ $\qquad x^2=a^2b.$
5. $x^2=3c^2$ $\qquad x^2=-361$ $\qquad x^2=-196a.$
6. $x^2-10=71;$ $\qquad x^2-17=32.$
7. $x^2+23=167;$ $\qquad x^2+45=214.$
8. $6x^2-27=5x^2+73;$ $\qquad 8x^2+56=380+7x^2$
9. $7x^2=252;$ $\qquad 5x^2=980.$
10. $2x^2+35=1315-3x^2.$
11. $x^2=a^2-10ab+25b^2.$
12. $x^2=\frac{4}{9}m^2+mn+\frac{9}{16}n^2.$
13. $x(2x-3)-3(5-x)=83.$
14. $(2x+5)(2x-5)=11.$
15. $(7+x)^2+(7-x)^2=130.$
16. $(3x+5)(4x+3)=(5x-3)(2x-9)+80x+20.$
17. $(2x-3)(3x-4)-(x-13)(x-4)=40.$
18. $(3x-4)(4x-3)-(2x-7)(3x-2)=214.$
19. $8(2-x)^2=2(8-x)^2.$
20. $\frac{2x^2-8}{3}=8; \; 3x-\frac{4}{3x}=0.$
21. $\frac{x^2-6}{2}-\frac{x^2+4}{4}=5.$
22. $\frac{5x-3}{x}=\frac{7-x}{x+2}; \qquad \frac{4x+5}{7x-1}=\frac{x+2}{5x-3}.$

23. $\frac{x}{x+2} + \frac{x}{x-2} = 1.$

24. $\frac{x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} = \frac{40}{x^2-4}.$

25. $\frac{x^2-5x+11}{x^2-7x+83} = \frac{5}{7}; \quad \frac{ax+b}{a+bx} = \frac{cx+d}{c+dx}$

26. $S = \pi r^2$; calcular r.
27. $S = 4\pi r^2$; calcular r.
28. $p : p' = r^2 : r'^2$; calcular r.

29. $e = \frac{3c^2}{2}$; calcular c.

30. $h = \frac{8p^3}{s^2}$; calcular s.

31. $\frac{1}{\sqrt{x+4}} = \frac{\sqrt{x-4}}{3}.$

32. $\sqrt[3]{\sqrt{5x^2+9}-19} = 2.$

33. $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4} = \frac{x+1}{\sqrt{x+4}}.$

34. $\sqrt{x+3} - \sqrt{5x-25} = \frac{8}{\sqrt{x+3}}.$

35. $\sqrt{10+x} - \sqrt{10-x} = 2.$
36. $2\sqrt{5+x} + \sqrt{9-3x} = \sqrt{41-3x}.$
37. $\sqrt{5+x} - \sqrt{25-3x} = 2\sqrt{5-x}.$

38. Calcular la media proporcional geométrica entre 3 y 27, entre 8 y 72, entre 48 y 27, entre 27 y 75, entre 6 y 294, entre ax y $\frac{x}{a}$, entre a^2-b^2 y $\frac{a-b}{a+b}$, entre $2\sqrt{6}$ y $3\sqrt{6}$, entre $20+5\sqrt{7}$ y $20-5\sqrt{7}$.

39. Si 147 se divide por cierto número, resulta el triple de éste. ¿Cuál es el número?

40. Dos números, cuyo producto es 980, son entre sí como 4 : 5. Calcular estos números.

41. El producto de los $\frac{5}{6}$ de un número por sus $\frac{3}{8}$ es 720. ¿Cuál es el número?

42. El producto de los $\frac{2}{5}$ de un número más 6 por los $\frac{2}{5}$ menos 6 es 540. ¿Cuál es el número?

43. Calcular tres números pares consecutivos, cuya suma sea igual a $\frac{3}{32}$ del producto.

44. La suma de los cuadrados de tres números consecutivos es 365. ¿Cuáles son estos números?

45. Calcular los lados de un rectángulo equivalente a un cuadrado de 36 m por lado, sabiendo que uno es igual a $\frac{4}{9}$ del otro.

46. Calcular la diagonal de un cuadrado, cuya área es 72 m^2.

47. Calcular la altura de un triángulo equilátero, cuyo lado mide 14 m.

48. Calcular el radio de un círculo, equivalente a la suma de otros dos círculos de radios $r=6$ m y $r'=8$ m.

49. Desde un punto situado a 11 metros del centro de un círculo de 7 m de radio, se traza una secante que queda dimidiada por la circunferencia. Calcular la longitud de la secante.

50. Los segmentos de la hipotenusa de un triángulo rectángulo determinados por la altura miden 28 m y 63 m, respectivamente. Calcular la altura.

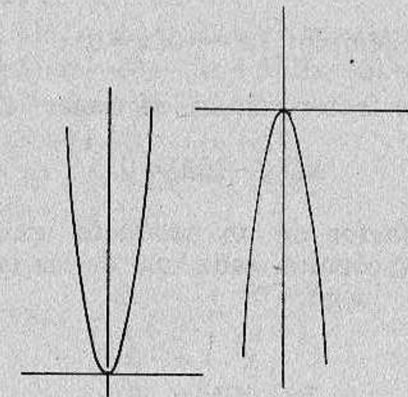
51. Calcular el cateto *a* de un triángulo rectángulo, conociendo las proyecciones $p=18$ m y $q=54$ m de los catetos sobre la hipotenusa.

52. Desde un punto fuera de un círculo parten una secante y una tangente. La secante mide 96 cm y la cuerda correspondiente, 42 cm. Calcular la longitud de la tangente.

53. Calcular la longitud de una cuerda dimidiada por otra, cuyos segmentos miden 192 cm y 12 cm, respectivamente.

54. El producto de los segmentos de las cuerdas que pasan por un punto P de un círculo de radio igual a 14 cm, es 96. Calcular la distancia del punto P al centro del círculo.

Gráfico y estudio de la función $y=ax^2$



Al hacer los gráficos de las funciones $y=3x^2$ $(a>0)$ e $y=-3x^2$ $(a<0)$ se puede constatar que la función es continua, es decir, que adquiere un valor númerico para cualquier valor de la variable x.

La curva que corresponde a la función recibe el nombre de **parábola.** Es tangente al eje de las abscisas, en el origen.

Esta parábola es simétrica con respecto el eje de las ordenadas. Analíticamente se muestra esto porque la función no cambia al sustituir x por $-x$.

En el caso de ser $a>0$ (primer ejemplo), la función decrece desde $+\infty$ hasta 0 punto en cual tiene un **mínimo** y luego crece hasta $+\infty$.

Si $a<0$ la función crece desde $-\infty$ hasta 0; valor **máximo** y luego decrece hasta $-\infty$.

77. Resolución de una ecuación de segundo grado incompleta, de la forma $ax^2 - bx = 0$.

Ejemplo: $7x^2 - 105x = 0$.

Sacando x factor común, se tiene:

$$x(7x - 105) = 0.$$

Si cada factor de un producto igual a cero contiene la incógnita, cada uno de los factores es igual a cero: luego:

$$x' = 0$$

$$7x - 105 = 0$$

De donde: $x'' = 15.$

En la ecuación literal $ax^2 - bx = 0$, se tiene sucesivamente:

$$x(ax - b) = 0$$

$$x' = 0$$

$$ax - b = 0$$

$$x' = \frac{b}{a}$$

En una ecuación de segundo grado incompleta, por faltar el término conocido, una de las raíces es igual a cero.

Ejercicios: **1.** $x^2 - 3x = 0$.

2. $6x^2 + 42x = 0$. **3.** $x^2 - x = 0$.

4. $x^2 + ax = 0$. **5.** $x^2 + ax = bx$.

6. $(x-2)(x-3) = 6$.

7. $(x-2)(x+5) = 9x - 10$.

8. $(2x+6)(2x-6) = (2x+9)(3x-4)$.

9. $(8x+3)(2x-5) - (3x+5)(3x-5) = 22x + 10$.

10. $(x+3)^2 - 8x - 9 = 0$.

11. $(x+4)^2 + (x-3)^2 = (x+5)^2$.

12. $(x+13)^2 = (x+12)^2 + (x-5)^2$.

13. $(4^{3-x})^{2-x} = 4\,096$.

14. $\frac{3}{4}x^2 = 9x; \quad \frac{2x-1}{x+1} = \frac{3x-1}{x+1}.$

15. $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{2x-1}{x-1}.$

16. $3x + \frac{54}{2x+3} = 18.$

17. $\frac{4}{x+3} - \frac{3}{x-3} = \frac{7}{3}.$

18. $\frac{3(x^2-5)}{5} - \frac{2(x^2-70)}{7} = 17 + x.$

19. $\sqrt[5]{a^{x-5}} = \sqrt[x-2]{a^2}$

20. $\sqrt{x+9} - \sqrt{1-x} = 4.$

21. $\sqrt{1+4x} - \sqrt{1-4x} = 4\sqrt{x}.$

22. ¿Cuál es el número que multiplicado por sí mismo es igual al doble del mismo número?

23. Si la diferencia entre 8 veces cierto número y 24 se multiplica por dicho número, resulta cero. ¿Cuál es el número?

24. Calcular los tres lados de un triángulo rectángulo, sabiendo que sus valores son números enteros consecutivos.

25. ¿A qué distancia de una circunferencia de radio $r=9$ cm está situado un punto P, si la tangente trazada desde este punto es igual al duplo de la distancia pedida?

26. ¿A qué distancia de una circunferencia de radio $r=5{,}4$ cm está situado un punto P, si la secante que pasa por el centro es igual al duplo de la tangente que parte del mismo punto?

78. Ecuación de segundo grado completa particular.

La ecuación completa general,

$$ax^2+bx+c=0$$

se llama *completa particular* cuando el coeficiente de la segunda potencia de la incógnita es la unidad, por ejemplo:

$$x^2-6x-40=0$$

o, en general, $x^2+px+q=0$.

Una ecuación completa general se transforma en completa particular dividiendo todos sus términos por el coeficiente de la segunda potencia de la incógnita. Así la ecuación:

$$3x^2+20x+12=0$$

se convierte en completa particular dividiendo sus términos por 3 y resulta:

$$x^2+\frac{20}{3}x+4=0.$$

a) Para resolver esta ecuación se transpone primero el término conocido y resulta:

$$x^2+\frac{20}{3}x=-4.$$

El primer miembro es el desarrollo incompleto del cuadrado del binomio, cuyo primer término es x y el segundo $\frac{10}{3}$, puesto que $\frac{20}{3}x$ debe ser el producto del primer término del binomio por el duplo del segundo. Para completar el cuadrado del binomio se agrega a los dos miembros de la ecuación el cuadrado de $\frac{10}{3}$ y se tiene:

$$x^2+\frac{20}{3x}+\left(\frac{10}{3}\right)^2=\left(\frac{10}{3}\right)^2-4 \text{ (1)}.$$

(1) Los ejercicios 187 a 194 del Capítulo III tratan de completar el cuadro de un binomio.

Anotando el binomio en el primer miembro y calculando en el segundo, resulta:

$$\left(x + \frac{10}{3}\right)^2 = \frac{64}{9}.$$

Extrayendo raíz cuadrada de los dos miembros, se obtiene:

$$x + \frac{10}{3} = \pm \frac{8}{3}$$

Restando $\frac{10}{3}$, resulta:

$$x = -\frac{10}{3} \pm \frac{8}{3}$$

o sea $\quad x' = -\frac{2}{3}$

$$x'' = -6.$$

Resolver del mismo modo las ecuaciones siguientes:

1.	$x^2 - 6x - 16 = 0$	$x^2 + 10x + 24 = 0.$
2.	$x^2 + 18x - 40 = 0$	$x^2 - 14x + 33 = 0.$
3.	$x^2 - 10x - 39 = 0$	$x^2 + 12x - 45 = 0.$
4.	$x^2 + 16x + 63 = 0$	$x^2 - 8x - 105 = 0.$
5.	$x^2 + 3x - 40 = 0$	$x^2 - 7x - 30 = 0.$
6.	$x^2 + 17x + 72 = 0$	$x^2 - 15x + 54 = 0.$
7.	$x^2 + 5x - 2\frac{3}{4} = 0$	$x^2 - 11x - 60 = 0.$

8.	$x^2 - 15x + 56 = 0$	$x^2 - 1\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} = 0.$
9.	$x(x+5) - 84 = 0$	$x^2 = 5(x+10).$
10.	$x(x+1) - 22 = 0$	$x(x-2) = 2(x+6).$
11.	$(x+2)^2 = (2x-5)^2$	$(x-4)^2 = 16(4-x).$
12.	$(x+6)(x-6) - 8 = 1 - 4x;$	$x(x-5) - 4(x-2) = 30.$
13.	$x + \frac{6}{x} = 5$	$x - \frac{18}{x} = 3.$
14.	$x + \frac{1}{x} = 2\frac{1}{2}$	$\frac{4x-3}{x-4} = x + 12.$

b) Un trinomio de segundo grado ordenado se puede descomponer en un producto de dos factores binomiales de primer grado (N.° 25).

De aquí resulta otro procedimiento para resolver una ecuación de segundo grado completa particular.

Sea la ecuación: $x^2 - 6x - 40 = 0.$

En este caso hay que descomponer el coeficiente de la primera potencia de la incógnita en diferencia de dos factores de 40. Esta diferencia es $(10 - 4)$.

Sustituyendo 6 por esta diferencia, la ecuación se convierte en la siguiente:

$$x^2 - 10x + 4x - 40 = 0.$$

De donde resulta sucesivamente:

$$(x-10)(x+4)=0$$
$$x-10=0$$
$$x+4=0$$
$$x'=10$$
$$x''=-4.$$

Resolver, descomponiendo en factores, las ecuaciones siguientes:

1. $(x-9)(x-11)=0$ $\quad (x+7)(x-3)=0.$
2. $(x+8)(x+5)=0$ $\quad (x-1)(x+6)=0.$
3. $(3x-2)(2x-3)=0$ $\quad (3x-25)(7x+29)=0.$
4. $(5-x)(x-9)=(5-x)(7-x).$
5. $(7x-9)(3x+5)=4(7x-9).$
6. $(3x-2)(2x-3)=(3x-2)(3x-4).$
7. $(5x-6)(8x-9)=(3x-7)(5x-6).$
8. $x^2-15x+56=0$ $\quad x^2-18x+77=0.$
9. $x^2-17x+70=0$ $\quad x^2+19x+90=0.$
10. $x^2-20x+99=0$ $\quad x^2+12x-45=0.$
11. $x^2-2x=80$ $\quad x^2-3x=18.$
12. $x^2-11x=12$ $\quad x^2-4x=21.$
13. $x^2-24x+63=0$ $\quad x^2+5x=36.$

c) *Fórmula para resolver una ecuación de segundo grado completa particular.*

Sea la ecuación: $x^2+px+q=0$.

Aplicando el desarrollo a), resulta sucesivamente:

$$x^2+px=-q$$

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$$

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

$$x'=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

$$x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

En palabras:

La incógnita de una ecuación de segundo grado completa particular ordenada, es igual a la mitad del coeficiente de la primera potencia de la incógnita con signo contrario, más menos la raíz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado de esta mitad y el término conocido.

Resolver, aplicando la fórmula, las ecuaciones siguientes:

1. $x^2-18x+80=0.$
2. $x^2-4x+31=0.$
3. $x^2-4x-96=0.$
4. $x^2+8x-84=0.$
5. $x^2-17x+52=0.$
6. $x^2+19x+88=0.$
7. $x^2-7x-120=0.$
8. $x^2+11x-80=0.$
9. $x^2-15x-76=0.$
10. $x^2+13x-140=0.$
11. $x^2-1\frac{1}{2}x=1.$
12. $x^2-\frac{1}{5}x=24.$
13. $x^2+\frac{2}{3}x-\frac{8}{9}=0.$
14. $x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}=0.$
15. $x^2-1\frac{2}{3}x-26=0.$
16. $x^2-2\frac{5}{6}x+2=0.$
17. $x^2-2\frac{8}{45}x-1\frac{2}{3}=0.$
18. $x^2+0{,}6x=18{,}4.$
19. $x^2+4ax=12a^2.$
20. $x^2-5ax+6a^2=0.$
21. $x^2-2ax+6ab=9b^2.$
22. $x^2-72ab=8ax+81b^2.$
23. $x^2-(5a+7b)x+35ab=0.$
24. $x^2-(5a+6b)x+30ab=0.$
25. $x(x-1)=2(x+5).$
26. $3(x^2-8)=2x(x-1).$
27. $9-(x-6)^2=2x-2.$
28. $x(x-1)=2(x-3)^2.$
29. $(x-3)^2+(x-4)^2-(x-5)^2=17x+22.$
30. $(2+x)^2-(7-x)^2=(6-x)^2.$
31. $(2x-5)(x-4)-(3x-7)(x+1)+25=0.$
32. $3(x^2-1)-24=4(x+5)(x-3).$
33. $x+\dfrac{15}{x}=8.$
34. $x-\dfrac{18}{x}=3.$
35. $\dfrac{x^2}{2}+8=4x.$
36. $x+2-\dfrac{6}{x+2}=1.$
37. $\dfrac{x}{3}+\dfrac{18}{x}+5=0.$
38. $\dfrac{2x+11}{x}=5-\dfrac{x-5}{3}.$
39. $\dfrac{x-8}{x+2}=\dfrac{x-1}{2x+10}.$
40. $\dfrac{3x^2-8x+15}{7x^2-15x+27}=\dfrac{2}{5}.$

41. $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{13}{6}.$
42. $\dfrac{x+2}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{13}{6}.$
43. $\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{3-x}{2}=2.$
44. $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{8}{x^2-4}.$
45. $\dfrac{3x-2}{x}=\dfrac{2x-4}{x+1}+2.$
46. $\dfrac{3}{x-4}-\dfrac{4}{x-2}=\dfrac{3}{x}.$
47. $\dfrac{x+3}{3}-\dfrac{2}{x-4}=\dfrac{x}{6}+\dfrac{x-2}{4}.$
48. $\dfrac{x-1}{3}-\dfrac{7x-10}{12}=\dfrac{5x-6}{2x+2}-\dfrac{3x+2}{8}.$
49. $\sqrt{x+7}=x+1.$
50. $x+5=5\sqrt{x-1}.$
51. $\sqrt{5x+9}+x=15.$
52. $\sqrt{3x+1}-x+9=0.$
53. $\sqrt{4-x}+\sqrt{x-3}=1.$
54. $\sqrt{4x-3}-\sqrt{3x-5}=1.$
55. $\sqrt{x+7}+\sqrt{5(x-2)}=3.$
56. $\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-2}=1.$
57. $3\sqrt{x-1}-\sqrt{3x+1}=2.$
58. $2\sqrt{x-1}=\dfrac{3x}{\sqrt{2x+5}}.$
59. $\sqrt{x-7}+\dfrac{4}{\sqrt{x-7}}=\sqrt{2x+9}.$
60. $\sqrt{2x+7}-\sqrt{x-5}=\dfrac{6}{\sqrt{x-5}}.$

79. Resolución de una ecuación de segundo grado completa general.

Sea la ecuación: $ax^2+bx+c=0$

Se resta c y se divide la ecuación por a:

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

Se completa el cuadrado del binomio:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

Se escribe el binomio en el primer miembro y se expresa el segundo miembro en una sola fracción:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Se extrae raíz cuadrada: $x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Se resta $\frac{b}{2a}$; $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\quad x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Expresar la fórmula en palabras.

Observación. Si el coeficiente de la primera potencia de la incógnita es par, se obtiene una fórmula simplificada.

Sea la ecuación: $ax+2bx+c=0$.

Aplicando la fórmula anterior, se tiene:

$$x=\frac{-2b\pm\sqrt{4b^2-4ac}}{2a}$$

Sacando 4 factor común en la cantidad subradical, extrayendo raíz y simplificando por 2, se encuentra:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}.$$

Expresar la fórmula en palabras.

Resolver las ecuaciones siguientes, aplicando la fórmula:

1. $4x^2+5x=6$. **2.** $3x^2+2x=133$.
3. $6x^2+5x=1$. **4.** $3x^2+2x=85$.
5. $6x^2-13x+6=0$. **6.** $9x^2+12x+4=0$.
7. $3x^2-10x-25=0$. **8.** $3x^2-4x=7$.
9. $9x^2-8=6x$. **10.** $12x^2-13x+3=0$.
11. $7x^2-16x+9=0$. **12.** $9x^2+11x=58$.
13. $21x^2-8x-5=0$. **14.** $6x^2-35x+50=0$.
15. $8x^2-17x=115$. **16.** $11x^2+6x-56=0$.

17. $abx^2+(a^2-2b^2)x=2ab.$
18. $bdx^2+adx+ac=-bcx.$
19. $4ax^2-a^2b^2=2ab^2x-2a^2bx.$
20. $a(x+a)^2=b(x+b)^2.$
21. $(2a+3b)x^2-(a-2b)x=a+5b.$
22. $3x^2-4(x+5)=35.$ 23. $x(2x+5)=3.$
24. $(2x-15)(3x+8)+154=0.$
25. $(6x-5)(5x-4)-(4x-3)(3x-2)=22.$
26. $(2x-9)^2+(3x-14)^2=(x-1)^2.$
27. $(3x-7)(2x-9)-(5x-12)(x-6)=$
$=(x-2)(2x-3).$
28. $(5x-2)(5x+2)-(3x+4)^2=(6x-1)^2-53.$
29. $(2x-3) : 7=(2x+2) : (3x+2).$

30. $\dfrac{x+7}{2x+3}=\dfrac{3x-5}{x+3}.$ 31. $\dfrac{7x-5}{10x-3}=\dfrac{5x-3}{6x+1}.$

32. $5x-\dfrac{3}{x}=2.$ 33. $7x+2=\dfrac{9}{x}.$

34. $2x+\dfrac{3}{x}+7=0.$ 35. $9x+\dfrac{45}{x}=86.$

36. $\dfrac{2}{3}x^2+3x-1\dfrac{2}{3}=0.$ 37. $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{4}=$

38. $\dfrac{x}{2x+5}-\dfrac{1}{2x-5}+\dfrac{8}{4x^2-25}=0.$

39. $\dfrac{9-5x}{2}+\dfrac{15}{3x-4}=6x-5.$

40. $x+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{x}+3.$

41. $\dfrac{7-3x}{5-x}-\dfrac{2x}{3-x}=8.$

42. $\dfrac{3x-4}{x-8}-\dfrac{5x+1}{x+7}=10.$

43. $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{2x-7}=2.$

44. $\dfrac{x-2}{2x+2}+\dfrac{2x-3}{3x-1}=\dfrac{1}{2}.$

45. $\dfrac{x+2}{x-2}+\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{40}{21}.$

46. $\dfrac{6}{x-1}+\dfrac{10}{x-2}=\dfrac{7}{x-3}.$

47. $\dfrac{5x-8}{4}-\dfrac{3x-4}{5}=\dfrac{17}{2x-7}+\dfrac{x-4}{2}.$

48. $(a^{x+4})^{5x-3} : a^{18} = (a^{2x-1})^{x-4}$.

49. $(4^{3-x})^{2-x} = 1$.

50. $(10^{5-2x})^{4-x} = 100$.

51. $\sqrt[x-2]{a^{2x+1}} = (\sqrt[5x+2]{a^{7x-2}})^3$.

52. $4 + 3\sqrt{5x^2 - 7x + 12} = 7x$.

53. $\sqrt{4x-3} - \sqrt{x-6} = 4$.

54. $\sqrt{x+5} - \sqrt{5x-15} = \dfrac{8}{\sqrt{x+5}}$.

55. $\dfrac{2x + \sqrt{x+3}}{27} = \dfrac{5}{2x - \sqrt{x+3}}$.

56. $\sqrt{5x-1} = \sqrt{8-2x} + \sqrt{x-1}$.

57. $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3} = \sqrt{3x+4}$.

58. $\sqrt{4x+5} - \sqrt{5x-9} = \sqrt{x-4}$.

59. $\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-4} = \sqrt{2x-7}$.

Las ecuaciones que siguen, llamadas generalmente *bicuadradas*, se resuelven aprovechando una incógnita auxiliar que sustituya la incógnita de la ecuación en su grado inferior. La ecuación se convierte en ecuación de segundo grado, con respecto a la incógnita auxiliar. El valor de esta incógnita auxiliar da, por sustitución, el de la incógnita principal.

Ejemplo:

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

Se hace: $x^2 = y$

Sustituyendo en la ecuación, se tiene:

$$y^2 - 10y + 9 = 0$$

De donde: $y = 5 \pm 4$
$y' = 9;\ y'' = 1$

Ahora: $x^2 = 9;\ x = \pm 3$
$x^2 = 1;\ x = \pm 1$.

60. $x^4 + 16 = 17x^2$.

61. $x^4 + 5x^2 = 126$.

62. $8x^4 + 10x^2 = 3$.

63. $3x^4 - 13x^2 + 4 = 0$.

64. $x^4 - 26x^2 = 27$.

65. $15x^4 - 34x^2 = 15$.

66. $2x^2 + \dfrac{5}{3} = \dfrac{7}{x^2}$.

67. $16x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 8$.

68. $(3x-7)^2 - 4(3x-7) = 32$.

69. $(x^2-5)^2 - 13(x^2-5) + 36 = 0$.

70. $(2x-a)^2 = b(2x-a) + 2b^2$.

71. $(x^2-9)(x^2-16) = 15x^2$.

72. $x + \sqrt{x} = 6$.

73. $x - \sqrt{3x} = 6$.

74. $15x - 4\sqrt{3x} = 1$.

75. $3x - 4\sqrt{x} = 32$.

76. $3x + 2 + \sqrt{3x+1} = 31$ (1).

77. $x + 1 + \sqrt{x+2} = 1$.

78. $x + \sqrt{x+4} = 16$.

79. $4\sqrt{75-x} = x - 54$.

80. $\sqrt{x+1} + 3x = 27$.

---

(1) En este ejercicio y en otros siguientes, se forma una expresión igual a la cantidad subradical, para tener un ejercicio análogo al 76. Restando 1, la ecuación se convierte en $3x + 1 + \sqrt{3x+1} = 30$.

81. $x^2-8x-2\sqrt{x^2-8x+40}=-5.$

82. $39-8x+\sqrt{7x^2+8x-19}=7x^2.$

83. $4\sqrt[3]{x^2}+12\sqrt[3]{x}=7.$ **84.** $3\sqrt[5]{x^4}-5\sqrt[5]{x^2}=2.$

85. $x^{-4}+16=17x^{-2}.$ **86.** $x^{\frac{1}{2}}+6x^{-\frac{1}{2}}=5.$

87. $\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-3}=\sqrt{3x^2+4}.$

88. $\sqrt{7x^2-3}-\sqrt{3x^2+4}=\sqrt{x^2-3}.$

89. $\dfrac{x^2}{x+1}+\dfrac{x+1}{x^2}=\dfrac{5}{2}.$ Hágase: $\dfrac{x^2}{x+1}=y.$

90. $\dfrac{2x-6}{3x-4}+\dfrac{3x-4}{2x-6}=\dfrac{17}{4}.$

91. $\sqrt{\dfrac{3x-4}{x-5}}+\sqrt{\dfrac{x-5}{3x-4}}=\dfrac{5}{2}.$

80. Relaciones entre las raíces de una ecuación de segundo grado y sus coeficientes.

Las raíces de la ecuación $x^2+px+q=0$ son:

$$x'=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

$$x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

Sumando y después multiplicando miembro a miembro estas igualdades, resulta:

$$x'+x''=-p$$
$$x'x''=q$$

Estos resultados indican que:

La suma de las raíces de una ecuación de segundo grado completa particular ordenada, es igual al coeficiente de la primera potencia de la incógnita con signo contrario, y su producto es igual al término conocido.

Ejecutando las mismas operaciones con las raíces de la ecuación $ax^2+bx+c=0$, resulta:

$$x'+x''=-\frac{b}{a}$$

$$x'x''=\frac{c}{a}\text{; luego}$$

La suma de las raíces de una ecuación de segundo grado completa general ordenada, es igual al coeficiente de la primera potencia de la incógnita partido por el coeficiente de la segunda potencia de la incógnita con signo contrario y el producto es igual al término conocido partido por el coeficiente de la segunda potencia de la incógnita.

Aplicaciones.—Las propiedades de las raíces de una ecuación de segundo grado, permiten formar la ecuación que tenga por raíces dos valores dados.

Ejemplos: 1. *Formar la ecuación completa particular cuyas raíces sean* $x'=8$, $x''=-5$.

$$x'+x''=8-5=3=-p;\ p=-3$$
$$x'x''=-40=q.$$

La ecuación es: $x^2-3x-40=0$.

2. *Formar la ecuación cuyas raíces son:*

$$x'=4,\ x''=-\frac{2}{3}$$

$$x'+x''=\frac{10}{3}=-\frac{b}{a};\ \text{luego } b=-10 \text{ y } a=3$$

$$x'x''=-\frac{8}{3}=\frac{c}{a};\ \text{luego } c=-8.$$

La ecuación es: $3x^2-10x-8=0$.

Otra aplicación de las propiedades de las raíces de una ecuación de segundo grado es la transformación de un trinomio de segundo grado en un producto de dos factores entre la incógnita y las raíces, de la forma $(x-x')\,(x-x'')$.

Sustituyendo en la ecuación $x^2+px+q=0$ los coeficientes por las raíces, se tiene:

$$x^2-(x'+x'')x+x'x''=0.$$

De donde:

$$x^2-xx'-xx''+x'x''=0$$
$$x(x-x')-x''(x-x')=0$$
$$(x-x')(x-x'')=0.$$

Si la ecuación es $ax^2+bx+c=0$, se saca factor común a y se tiene

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0.$$

Sustituyendo el polinomio entre paréntesis por el producto $(x-x')(x-x'')$, se encuentra:

$$a\,(x-x')(x-x'')=0$$

Ejemplos: 1. $x^2+12x+35=0$

$$x=-6\pm1$$
$$x'=-5;\quad x''=-7$$
$$x^2+12x+35=(x+5)(x+7).$$

2. $4x^2-33x+65=0$

$$4\left(x^2-\frac{33}{4}x+\frac{65}{4}\right)=0$$

$$x=\frac{33}{8}\pm\frac{7}{8}$$

$$x'=5;\ x''=3\tfrac{1}{4}$$
$$4x^2-33x+35=4(x-5)(x-3\tfrac{1}{4})$$
$$=(x-5)(4x-13).$$

Ejercicios. Formar las ecuaciones que tengan como raíces:

1. -3 y -5. **2.** 8 y -8. **3.** 9 y 7.
4. 11 y 12. **5.** $2+\sqrt{5}$ y $2-\sqrt{5}$.
6. $5+3i$, $5-3i$.
7. 5 y $2\frac{3}{4}$. **8.** 6 y $-\frac{3}{4}$. **9.** $2\frac{1}{4}$ y $-\frac{5}{8}$.

Descomponer en producto los primeros miembros de las ecuaciones siguientes:

10. $x^2-15x+44=0.$ **11.** $x^2+15x+54=0.$
12. $x^2-6x-40=0.$ **13.** $x^2+7x-120=0.$
14. $x^2-4x-12=0.$ **15.** $x^2-7{,}7x+13=0.$
16. $5x^2-11x-12=0.$ **17.** $3x^2+20x+25=0.$
18. $5x^2-38x-24=0.$ **19.** $9x^2-32x+15=0.$

81. **Naturaleza de las raíces,** o sea **discusión de las raíces de una ecuación de segundo grado sin resolverla.**

La discusión se concreta a las tres cuestiones siguientes:

1.ª Si las raíces son reales o imaginarias.

2.ª Si las raíces son de igual o de distinto signo.

3.ª Cuál es el signo de las raíces.

Nos referimos primero a la ecuación completa particular $x^2+px+q=0$.

1.ª Si el término conocido es negativo, no hay duda acerca de la realidad de las raíces, puesto que la *discriminante* (cantidad subradical) es positiva.

Si el término conocido es positivo, la discriminante es una diferencia y se pueden presentar tres casos:

Si $\left(\frac{p}{2}\right)^2 > q$, *las raíces son reales y distintas.*

Si $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q$, *las raíces son reales e iguales.*

Si $\left(\frac{p}{2}\right)^2 < q$, *las raíces son imaginarias, complejas conjugadas.*

En el caso en que las raíces sean reales.

2.ª Si el término conocido es positivo, las raíces son del mismo signo (Regla de los signos de un producto); pero si es negativo, las raíces son de distinto signo.

3.ª Si las raíces son de igual signo, deben tener el signo contrario del coeficiente de la primera potencia de la incógnita, según la primera propiedad de las raíces.

Si las raíces son de distinto signo, la de mayor valor absoluto tendrá signo contrario al del coeficiente de la primera potencia de la incógnita.

Si la ecuación es completa general ordenada, varía sólo el cálculo para la primera cuestión. En esta ecuación la discriminante, en el caso de duda sobre la realidad de las raíces, es b^2-4ac.

Si $b^2 > 4ac$, *las raíces son reales y distintas.*

Si $b^2 = 4ac$, *las raíces son reales e iguales.*

Si $b^2 < 4ac$, *las raíces son imaginarias, complejas conjugadas.*

Ejemplos: **1.** $x^2+15x+50=0.$

1. Las raíces son reales y distintas, porque:

$$\frac{225}{4} > \frac{200}{4}.$$

2.ª Las raíces son de igual signo, porque su producto es positivo $(+50)$.

3.ª Las raíces son negativas, porque, teniendo igual signo, su suma es negativa (-15). Verifíquese la discusión por la resolución de la ecuación.

2. $2x^2-13x+15=0$.

1.ª $b^2-4ac=169-120$; las raíces son reales y distintas.

2.ª El producto de las raíces es $+\frac{15}{2}$; luego son de igual signo.

3.ª La suma de las raíces es $+\frac{13}{2}$; y como son de igual signo, tienen signo +.

Verifíquese la discusión, resolviendo la ecuación.

Ejercicios: Expresar en las ecuaciones siguientes, el producto de las raíces, la suma de las raíces y la discriminante:

1. $x^2+20x+64=0$.	2. $x^2+24x-180=0$.
3. $x^2-8x+16=0$.	4. $x^2-10x+41=0$.
5. $7x^2-30x+8=0$.	6. $5x^2-54x+40=0$.
7. $9x^2-40x-25=0$.	8. $16x^2-24x+9=0$.

9. ¿Cuál es la naturaleza de las raíces, si la discriminante es: a) 8; b) —18; c) 0?

Discutir las raíces de las ecuaciones siguientes:

10. $x^2-13x+36=0$.	11. $x^2+12x+20=0$.
12. $x^2-9x-36=0$.	13. $x^2+12x+36=0$.
14. $x^2-8x+21=0$.	15. $x^2+10x+34=0$.
16. $3x^2-16x+5=0$.	17. $6x^2-15x-28=0$.
18. $2x^2+17x+33=0$.	19. $16x^2-24x+9=0$.
20. $4x^2-48x+153=0$.	21. $9x^2+180x+904=0$.

Problemas.

1. ¿Qué número multiplicado por 30 es 1 000 unidades menor que su cuadrado?

2. Descomponer 3 024 en dos factores, cuya suma sea 120.

3. Descomponer 100 en dos sumandos tales que la suma de sus cuadrados sea 5 162.

4. Al producto de la edad de una persona por 15 le falta 100 unidades para completar el cuadrado de la edad. ¿Cuál es la edad?

5. ¿En cuánto hay que disminuir el primer factor y aumentar el segundo del producto 13 . 27, para que el producto disminuya en 51?

6. El numerador de una fracción tiene una unidad menos que el denominador. Aumentando el numerador en 14 y el denominador en 4, el valor de la fracción se duplica. ¿Cuál es la fracción?

7. La suma de las dos cifras de un número es 12. Dividiendo el número invertido por las decenas del número primitivo, se obtiene un número menor en 15 unidades al que se obtiene dividiendo el primer número por sus unidades. ¿Cuál es el número?

8. El número formado por las dos primeras cifras de la izquierda de un número de cuatro cifras y el número formado por las dos últimas son consecutivos. El producto de estos números sumado con el número completo es igual a 1 244. ¿Cuál es el número de las cuatro cifras?

9. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es 25 metros y la suma de los catetos es 35 m. ¿Cuánto miden los catetos?

10. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 25 m y uno de los catetos tiene 6 m más que su proyección sobre la hipotenusa. Calcular los catetos.

11. Un cateto de un triángulo rectángulo mide un metro menos que la proyección del otro cateto sobre la hipotenusa. ¿Cuánto mide esta proyección, si el otro segmento de la hipotenusa mide 9 m?

12. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 9 m más que uno de los catetos y 8 m más que el otro. Calcular los lados del triángulo.

13. Calcular los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que la suma de los catetos es 28 m y que la hipotenusa tiene 4 m menos que el doble del cateto menor.

14. El cuadrado de la suma de los catetos de un triángulo rectángulo tiene 120 m² más que el cuadrado de la hipotenusa. Calcular los catetos y la hipotenusa, sabiendo que la diferencia entre los catetos es 7 m.

15. La suma de la base con la altura de un triángulo es 30 m y el área del triángulo es 112 m². Calcular la base y la altura del triángulo.

16. La suma de los perímetros de dos cuadrados es 240 cm y la suma de sus áreas es 2 522 cm². ¿Cuánto mide el lado de cada cuadrado?

17. La suma de los catetos de un triángulo rectángulo es 71 cm y el área del triángulo es 330 cm². ¿Cuánto miden los catetos?

18. En un triángulo rectángulo el cateto menor mide 42 cm y los segmentos de la hipotenusa determinados por la altura tienen una diferencia de 98 cm. ¿Cuánto mide la hipotenusa?

19. En un triángulo isósceles la base mide 19 y cada lado 8 cm más que la altura trazada a la base. ¿Qué longitud tiene la base?

20. La tangente trazada a una circunferencia desde un punto situado a 61 cm de distancia del centro es 49 cm más larga que el radio de la circunferencia. ¿Qué longitud tiene el radio?

21. Un individuo compra un mueble usado y, después de componerlo, lo vende en E° 144, obteniendo un tanto por ciento de ganancia igual al precio de compra. ¿En cuánto había comprado el mueble?

22. El segundo curso de un colegio tiene 3 alumnos más que el tercero, y el primero 6 alumnos más que el segundo. En una colecta de caridad cada alumno del mismo curso da la misma suma, pero cada alumno del tercer curso da tanto como cada alumno del segundo y del primero juntos. El tercer curso juntó E° 10, el segundo E° 6,90 y el primero E° 5,80. ¿Cuántos alumnos tiene cada curso?

23. Los socios de un club se proponen reunir E° 360 para los pobres, debiendo dar cada socio la misma cantidad. Otro club acuerda reunir la misma suma; pero, como este club tiene 6 socios menos que el primero, cada socio debe dar E° 2 más. ¿Cuántos socios tiene cada club?

24. Cierto número de personas gastó en un restaurant E° 50,40. Si las personas hubieran sido dos menos y cada una hubiera gastado E° 1,05 más, la cuenta habría sido de E° 52,50. ¿Cuántas eran las personas?

25. Buscar dos números impares consecutivos, sabiendo que la suma de sus cuadrados es 394.

26. Dos obreros pueden hacer una obra juntos en 18 días; el primero, trabajando solo, la haría en 27 días más que el segundo, trabajando solo también. Encontrar el tiempo en que cada obrero hace la obra.

27. Una deuda de E° 5 400 debe ser pagada en partes iguales por cierto número de personas. Habiendo muerto una de ellas, la cuota de las restantes aumenta en E° 450. ¿Cuál era el número de personas?

28. Se vende una mercadería en E° 432, ganando un tanto por ciento igual a la tercera parte del precio de compra. ¿Cuál era el precio de compra?

29. Dos fabricantes, A y B, pueden terminar un pedido, trabajando juntos, en 6 semanas. Si ejecuta el trabajo cada uno por su cuenta, A necesita 5 semanas más que B. ¿En cuántas semanas hace el trabajo cada fabricante?

30. Las dos cifras de un número suman 9. Invirtiendo el orden de las cifras y multiplicando el número que resulta por el primitivo, se obtiene 2 268. ¿Cuál es el número?

31. Si un número de dos cifras, cuya suma es 15, se divide por el cuociente de la primera cifra por la segunda, resulta $103\frac{1}{2}$. ¿Cuál es el número?

32. El cateto mayor de un triángulo rectángulo mide 60 cm y la diferencia de las proyecciones sobre la hipotenusa es 21 cm. Calcular los otros dos lados del triángulo.

33. En un triángulo la base mide 15 cm más que el doble de la altura. Calcular la base y la altura, sabiendo que el área del triángulo es

34. En la parte central de un sitio rectangular se edifica una casa de 25 m de ancho por 30 de largo. El terreno que rodea el edificio es del mismo ancho y su área es el doble de la que ocupa el edificio. ¿Cuál es el ancho del terreno que rodea el edificio?

35. La resultante de dos fuerzas que obran bajo un ángulo recto sobre un mismo plano es 32,5 kg. ¿Cuáles son estas fuerzas, si su suma es 42,5 kg?

36. Un comerciante compró café por E° 132 y té por E° 180, obteniendo 40 kg más de té que de café. ¿Cuánto valía el kilogramo de café, sabiendo que un kilogramo de té importó E° 0,40 menos que un kilogramo de café?

37. Un comerciante había encargado café por E° 272; pero como el kilogramo de café había subido E° 0,10 en su precio, el vendedor le remitió 10 kg menos que los pedidos. ¿Cuántos kilogramos había pedido?

38. Sobre un lado de un ángulo recto se encuentra un cuerpo A, a 18 m del vértice y sobre el otro lado un cuerpo B, a 20 m del vértice. Ambos se alejan del vértice, en la dirección de los lados; A, con una velocidad de 5 m por segundo y B de 3. ¿Después de cuántos segundos los cuerpos estarán separados entre sí por una distancia de 50 m?

39. Un tren recorre 120 km en cierto tiempo. En la segunda vez recorre la misma distancia en 30 minutos menos, por haber aumentado su velocidad en $3\frac{1}{3}$ m por segundo. ¿En qué tiempo recorrió la distancia en la primera vez?

40. Alguien regala E° 525 para repartirlos entre los soldados de una compañía de un batallón. Como 25 soldados estaban con licencia, cada uno de los soldados presentes obtuvo E° 0,50 más. ¿De cuántos soldados se componía la compañía?

CAPITULO XIII

Algunos sistemas sencillos de ecuaciones de segundo grado.

Un sistema de ecuaciones es de segundo grado si hay por lo menos un término de segundo grado.

Si las incógnitas son x e y, los términos de segundo grado son x^2, y^2, xy.

Estudiaremos la resolución de algunos tipos de sistemas. No hay métodos que puedan ser aplicados en todos los casos.

1. Resolución por sustitución.

Se aplica si en una de las ecuaciones hay un término de primer grado.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=4 \\ x^2-y^2=3 \end{array}\right|$$

Se despeja x en la primera ecuación

$$x=4-2y$$

Se sustituye en la segunda

$$(4-2y)^2-y^2=3$$

ecuación de segundo grado cuyas soluciones son $1; \frac{13}{3}$.

Reemplazando se obtienen los valores de x que son $2; -\frac{14}{3}$

Soluciones del sistema:

$$x_1 = 2; \quad y_1 = 1$$

$$x_2 = -\frac{14}{3}; \quad y_2 = \frac{13}{3}$$

2.—Sistemas reducibles a la forma

$$\left.\begin{array}{l}(x+y)^2 = a\\(x-y)^2 = b\end{array}\right|$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l}x^2+xy+y^2=37\\x^2-xy+y^2=13\end{array}\right|$$

Restando las ecuaciones miembro a miembro se obtiene

$$2xy = 24$$
$$xy = 12$$

$$\begin{array}{rl} & x^2+xy+y^2=37\\ & xy \quad =12\\ \hline \text{Sumando} & x^2+2xy+y^2=49\\ & (x+y)^2=49\\ & x+y=\pm 7\end{array} \qquad \begin{array}{rl} & x^2-xy+y^2=13\\ & xy \quad =12\\ \hline \text{Restando} & x^2-2xy+y^2=1\\ & (x-y)^2=1\\ & x-y=\pm 1\end{array}$$

Se pueden formar cuatro sistemas combinando los valores obtenidos.

$$\left.\begin{array}{l}x+y=7\\x-y=1\end{array}\right| \quad \left.\begin{array}{l}x+y=7\\x-y=-1\end{array}\right| \quad \left.\begin{array}{l}x+y=-7\\x-y=1\end{array}\right| \quad \left.\begin{array}{l}x+y=-7\\x-y=-1\end{array}\right|$$

$$\begin{array}{llll}x_1=4 & x_2=3 & x_3=-3 & x_4=-4\\ y_1=3 & y_2=4 & y_3=-4 & y_4=-3\end{array}$$

Este sistema tiene cuatro soluciones.

Ejercicios.

1. $\left.\begin{array}{l}x+y=10\\xy=24\end{array}\right|$

2. $\left.\begin{array}{l}x+3y=7\\x^2+y^2=5\end{array}\right|$

3. $\left.\begin{array}{l}x-y=4\\x^2+2y^2=27\end{array}\right|$

4. $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=82\\xy=9\end{array}\right|$

5. $\left.\begin{array}{l}x+y=4\\x^2+y^2=10\end{array}\right|$

6. $\left.\begin{array}{l}x-y=9\\x^2+y^2=101\end{array}\right|$

7. $\left.\begin{array}{l}x^2+xy+y^2=151\\x^2-xy+y^2=61\end{array}\right|$

8. $\left.\begin{array}{l}x^2-y^2=80\\x+y=10\end{array}\right|$

9. $\left.\begin{array}{l}x^2-y^2=15\\x-y=3\end{array}\right|$

10. $\left.\begin{array}{l}x-y=3\\x^2+3xy+y^2=29\end{array}\right|$

11. $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2\\x+y=2\end{array}\right|$

12. $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-\frac{1}{20}\\x-y=1\end{array}\right|$

13. $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{4}(x+y)=1\\x^2-5xy+y^2=16\end{array}\right|$

14. $\left.\begin{array}{l}x:y=3:2\\x^2-y^2=45\end{array}\right|$

EJERCICIOS DE RECAPITULACION

Reducir a su forma más sencilla las expresiones siguientes:

1. $\left(\frac{27a^{-3}}{8b^6}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

2. $\left(\frac{b^{-4}}{16a^{-2}}\right)^{-\frac{3}{4}}$.

3. $(a^{-x}b^{y})^{4} \cdot (a^{4}b^{-2})^{x}$. 4. $\left(\sqrt[3]{a^{6}b^{2}}\right)^{6}$

5. $\left(\sqrt[8]{a^{-1}\,b^{-2}}\right)^{-4}$. 6. $\left(\frac{a^{-3}b^{2}}{a\,b^{-4}}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{ab^{-1}}{a^{-5}b^{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}$

7. $\left(\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{b^{-2}}} \cdot \frac{b^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{4}}}\right)^{-3}$. 8. $\left(\sqrt[4]{\left(a^{-\frac{1}{3}}b^{-1}\right)^{5}}\right)^{-\frac{2}{5}}$

9. $\left(\frac{a^{m+n}}{a^{m-n}}\right)^{2m} \cdot \left(\frac{a^{2m}}{a^{2n}}\right)^{m-n}$

10. $\left(a^{\frac{1}{x-y}}\right)^{x^{2}-y^{2}} + \sqrt{\frac{a^{x+y}}{a^{x-y}}}$

11. $\left(m^{\frac{a}{b}}\,n^{-1}\right)^{b} : \left(\frac{m^{a^{2}-b^{2}}}{n^{ab+b^{2}}}\right)^{\frac{1}{a+b}}$

12. $\sqrt[n]{\frac{5^{n+2}-5^{n}}{24}}$ Indicación: sacar factor común 5^{n}.

13. Multiplicar $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$ por $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}$

14. Multiplicar $a^{\frac{3}{2}}+5$ por $a^{\frac{3}{2}}+3$

15. Multiplicar $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{2}}$ por $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}$

16. Multiplicar $x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y$ por $x-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y$.

17. Multiplicar $a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$ por $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$.

18. Dividir $x^{\frac{2}{5}}+3x^{\frac{1}{5}}+2$ por $x^{\frac{1}{5}}+1$.

19. Dividir $x^{\frac{2}{5}}+2x^{\frac{1}{5}}-3$ por $x^{\frac{1}{5}}+3$.

20. Dividir $3x+5x^{\frac{1}{2}}+2$ por $x^{\frac{1}{2}}+1$.

21. Factorizar $a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}-20$.

22. Dividir $x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}$ por $x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$.

23. Dividir $27x+9x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}-10$ por $3x^{\frac{1}{3}}-2$.

24. Extraer raíz cuadrada de $x+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y$.

25. Extraer raíz cuadrada de $a^{2}-2ab^{\frac{1}{2}}+b$.

26. Extraer raíz cuadrada de $9^{n}-2 \cdot 6^{n}+4^{n}$.

27. Demuestre que 4^{-1} es el valor de

$$\frac{2^{x+1}}{2^{x(x-1)}} : \frac{4^{x+1}}{(2^{x-1})^{x+1}}$$

28. Calcular el valor de la expresión

$$\frac{2}{\sqrt{37}+\sqrt{13}} - \frac{2}{\sqrt{37}-\sqrt{13}}$$

29. Efectuar la suma

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

30. Si $a = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$, $b = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$, calcular el

valor de $3a^2+5ab-3b^2$.

31. Hacer racional el denominador de

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}.$$

32. Calcular una media proporcional geométrica entre $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ y $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$.

33. Racionalizar

$$\frac{5^{\frac{1}{2}}+9^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{1}{2}}-9^{\frac{1}{4}}}.$$

34. Comparar las siguientes expresiones $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^5$ y $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{-5}$. ¿Cuál es mayor?

35. Indicar en qué forma se puede determinar cuál cantidad es la mayor, entre $\sqrt[3]{6}$ y $\sqrt[4]{11}$.

36. Transformar la expresión $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$ en otra de denominador racional.

37. Transformar la expresión siguiente en una raíz cuya cantidad subradical no contenga exponentes fraccionarios ni negativos.

$$\left[\frac{\left(\sqrt[6]{a^2b^{-3}}\right)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{a^{-1}b^{\frac{2}{3}}}}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

38. Calcular $3^{x-1}\cdot 4^{x-1}\cdot 5^{x-1}$ para $x=\frac{1}{2}$, correctamente aproximado a los milésimos.

Resolver las ecuaciones:

39. $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}=\frac{4}{a+x}$.

40. $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=98$

41. $\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{2x-2}}}-\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+2}}}=0$

42. $6\sqrt{x}=5x^{-\frac{1}{2}}-13$.

43. $(x^2-x-20)(x^2-x-42)=504$. Indicación. Empléese una incógnita auxiliar. Por ej: $x^2-x-42=y$, entonces $x^2-x-20=y+22$.

44. $x^2-6x+9=4\sqrt{x^2-6x+6}$.

45. $2x-x^2-\sqrt{6x^2-12x+7}=0$

46. $(x^2-4x+2)^2=x^2-4x+44$.

47. $x^{-2}-2x^{-1}=8$.

48. $9+x^{-4}=10x^{-2}$.

49. $1+8x^{\frac{6}{5}}+9\sqrt[5]{x^3}=0$.

50. $x^{\frac{2}{n}}+6=5x^{\frac{1}{n}}$.

51. $3^{\frac{x}{2}}+3^{-\frac{x}{2}}=2$

52. $3^{2x}+9=10\cdot 3^x$

53. $4^{3x-1}=0{,}5^{x-5}$

54. $2^x\cdot 5^{x+1}=\frac{0{,}5}{10^{-8}}$

55. $5(5^x+5^{-x})=26$.

56. $(2-x)^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}=(2-x)^{-\frac{1}{2}}$

57. $(x^3-8x^2-18x-1)^{\frac{1}{3}}-3=x$.

58. $x^{2n}-x^n(a^n+b^n)+a^nb^n=0$.

59. Encontrar todas las soluciones de:

$$\sqrt{x(x+1)(x+2)}=x+1$$

60. Comprobar que $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ es raíz de la ecuación $x^3-1=0$.

61. Comprobar que $\frac{1}{2}(3+i\sqrt{7})$ es raíz de la ecuación $x^2-5x+12=0$

62. En la ecuación $ax^2-22x+35=0$ una de las raíces es $\frac{7}{3}$. Encontrar el valor de a.

63. Demostrar que las raíces de la ecuación $b(x^2-1)=(a-c)x$ son reales.

64. Demostrar que las raíces de la ecuación $(a-b+c)x^2+2ax+a+b-c=0$ son racionales.

65. Demostrar que las raíces de la ecuación $(x-a)(x-b)=c^2$ son reales.

66. ¿Qué valor debe tener k para que valga 0 una de las raíces de la ecuación $7x^2-4x+2k-10=0$?

67. ¿Para qué valores de m, la ecuación $x^2+2(m+2)x+9m=0$ tendrá raíces iguales?

68. Demostrar que son racionales las raíces de la ecuación $x^2-2px+p^2-q^2+2qr-r^2=0$.

69. ¿Qué valor debe tener k en la ecuación $x^2-2(k+1)x+(2k+1)=0$, para que:

a) sus raíces sean iguales;
b) el producto de sus raíces sea igual a 3, y
c) la suma de sus raíces sea igual a 6.

70. Dada la ecuación $x^2-mx+m^2-3m+2=0$, determinar m de modo que una de las raíces sea el doble de la otra.

71. Dada la ecuación $3x^2+2(m-7)x-27=0$, determinar m de modo que sus raíces difieran sólo en el signo.

Si α y β son las raíces de la ecuación $ax^2+bx+c=0$, encontrar los valores de:

72. $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$. 73. $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$. 74. $(\alpha-\beta)^2$.

75. $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}$ 76. $\left(\alpha+\dfrac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\dfrac{1}{\alpha}\right)$ 77. $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2$

78. $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$. 79. $\alpha^4+\beta^4$. 80. $\alpha^3+\beta^3$.

Si α y β son las raíces de la ecuación $x^2-ax+b=0$, formar la ecuación cuyas raíces son:

81. 2α, 2β. 82. $\alpha+1$, $\beta+1$. 83. $\dfrac{\alpha}{2}$, $\dfrac{\beta}{2}$.

84. $\alpha-2$, $\beta-2$. 85. α^2, β^2. 86. $\alpha+3\beta$, $3\alpha+\beta$.

TERCERA PARTE

Correspondiente al sexto año de Humanidades

CAPITULO XIV

Sistema de ecuaciones simultáneas de primer grado con dos y tres incógnitas.

82. Ecuaciones indeterminadas. Una ecuación con dos incógnitas, x e y, es de primer grado cuando puede reducirse a la forma $ax+by=c$; por ejemplo $3x+2y=18$.

De la ecuación:

$$3x+2y = 18$$

se deduce:

$$x = \frac{18-2y}{3}$$

$$y = \frac{18-3x}{2}.$$

Estos resultados indican sólo el valor de una incógnita en función de la otra; pero no expresan un *valor determinado* de ninguna de ellas.

Se puede, sin embargo, atribuir valores arbitrarios a una de las incógnitas y deducir de ellos valores correspondientes de la otra.

Por ejemplo: para $y=1$, $x=5\frac{1}{3}$;
para $y=2$, $x=4\frac{2}{3}$;
para $y=3$, $x=4$.

La ecuación propuesta tiene, pues, infinitas soluciones; de aquí el nombre de **ecuación indeterminada** que se da a una ecuación de primer grado con dos (o más) incógnitas, en contraposición a una ecuación de primer grado con una sola incógnita, que tiene *una* solución y se llama, por esto, *ecuación determinada*.

83. Ecuaciones simultáneas. Si se forma otra ecuación con las mismas incógnitas de la ecuación $3x+2y=18$, por ejemplo, $5x-6y=2$, se obtiene que: $x = \frac{6y+2}{5}$.

Para que los valores de x e y satisfagan al mismo tiempo las dos ecuaciones, es necesario que con el mismo valor de x se obtenga *simultáneamente:*

$$x=\frac{18-2y}{3} = \frac{6y+2}{5}.$$

La identidad de los valores da x en función de y en ambas ecuaciones da lugar a la ecuación:

$$\frac{18-2y}{3} = \frac{6y+2}{5}$$

Dando forma entera a esta ecuación, resulta:

$$90-10y=18y+6$$

De donde: $28y=84$

$$y=3$$

Sustituyendo este valor en:

$$x=\frac{18-2y}{3}, \text{ se encuentra:}$$

$$x=4.$$

Las dos ecuaciones se satisfacen con los valores $x=4$ e $y=3$, por lo cual se llaman *ecuaciones simultáneas*.

Dos ecuaciones simultáneas forman un *sistema de ecuaciones con dos incógnitas*. Las dos ecuaciones del sistema deben ser independientes la una de la otra, es decir, una de las ecuaciones no debe ser una mera consecuencia de la otra.

Un sistema de ecuaciones simultáneas se llama *determinado*, si se compone de tantas ecuaciones independientes como incógnitas tiene.

84. Eliminación. Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, se *elimina* una de las incógnitas, combinando las ecuaciones de modo que resulte una ecuación con una incógnita.

Eliminación es el procedimiento que hace desaparecer una incógnita de un sistema de ecuaciones.

Los métodos principales de eliminación son *eliminación por sustitución y por reducción*, llamado también *por adición y sustracción*.

85. Eliminación por sustitución. Este método consiste en despejar en una de las ecuaciones, una de las incógnitas en función de la otra y sustituir este valor en la otra ecuación.

Ejemplo:

$$\begin{array}{l|}3x+4y=31\\4x+6y=44\end{array}$$

Se despeja x en la primera ecuación:

$$x=\frac{31-4y}{3}.$$

Se sustituye en la segunda ecuación:

$$\frac{4(31-4y)}{3}+6y=44.$$

Se multiplica por 3 y se resuelve el paréntesis:

$$124-16y+18y=132$$

De donde: $2y=8$

$$y=4$$

Se sustituye este valor en $x=\frac{31-4y}{3}$

$$x=5.$$

Este método se aplica de preferencia cuando una de las incógnitas tiene como coeficiente la unidad.

Resolver por este método los sistemas:

1. $\left.\begin{aligned} x&=10 \\ x+y&=16 \end{aligned}\right|$

2. $\left.\begin{aligned} x-y&=6 \\ y&=15 \end{aligned}\right|$

3. $\left.\begin{aligned} x+y&=11 \\ y&=2x+5 \end{aligned}\right|$

4. $\left.\begin{aligned} 6y-x&=10 \\ x&=3y+2 \end{aligned}\right|$

5. $\left.\begin{aligned} x-2y&=3 \\ 4x+3y&=45 \end{aligned}\right|$

6. $\left.\begin{aligned} 8x+3y&=25 \\ 5x+y&=13 \end{aligned}\right|$

7. $\left.\begin{aligned} 10x-y&=30 \\ 7x-2y&=8 \end{aligned}\right|$

8. $\left.\begin{aligned} 12x-8y&=56 \\ 9x-y&=67 \end{aligned}\right|$

9. $\left.\begin{aligned} 4x+6y&=52 \\ 5x-2y&=27 \end{aligned}\right|$

10. $\left.\begin{aligned} 10x-6y&=30 \\ 7x-4y&=24 \end{aligned}\right|$

11. $\left.\begin{aligned} 21x+35y&=91 \\ 3x+7y&=17 \end{aligned}\right|$

12. $\left.\begin{aligned} 24x-5y&=162 \\ 6x+7y&=90 \end{aligned}\right|$

13. $\left.\begin{aligned} 11x-36y&=26 \\ 7x+12y&=34 \end{aligned}\right|$

14. $\left.\begin{aligned} 15x-8y&=80 \\ 20x-12y&=100 \end{aligned}\right|$

86. Eliminación por reducción. Este método consiste en igualar en las dos ecuaciones los coeficientes de la incógnita que se trata de eliminar. Este coeficiente común debe ser igual al mínimo común múltiplo de los coeficientes de la incógnita en las ecuaciones del sistema. Con este objeto, se multiplica cada ecuación por el número que mul-

tiplicado por el coeficiente de la incógnita por eliminar dé el coeficiente común; en seguida se suman las ecuaciones resultantes, cuando la incógnita que se debe eliminar tiene signos distintos en las dos ecuaciones y se restan, si los signos son iguales.

La ecuación que resulta contiene una sola incógnita, cuyo valor se calcula.

Para tener la ecuación con la otra incógnita se repite el procedimiento de eliminación de la incógnita conservada en el primer cálculo o bien se sustituye el valor encontrado, en una de las ecuaciones.

Ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} 9x-8y&=32 \\ 7x-6y&=26 \end{aligned}\right| \;\left.\begin{aligned} .\,3 \\ .\,4 \end{aligned}\right| \;\begin{aligned} .\,7 \\ .\,9 \end{aligned}$$

Para eliminar y se multiplica la primera ecuación por 3 y la segunda por 4, porque el mínimo común múltiplo de 8 y 6 es 24. El sistema se transforma en el siguiente:

$$\begin{aligned} 27x-24y&=96 \\ 28x-24y&=104 \end{aligned}$$

Restando la primera ecuación de la segunda, resulta:

$$x=8$$

Para eliminar x se multiplica la primera ecuación por 7 y la segunda por 9:

$$\begin{aligned} 63x-56y&=224 \\ 63x-54y&=234 \end{aligned}$$

Se resta la primera ecuación de la segunda:

$$2y=10$$
$$y=5.$$

En lugar de repetir el procedimiento para calcular el valor de la segunda incógnita, se sustituye la incógnita calculada por su valor, en una de las ecuaciones, en la más sencilla, como sigue: Se sustituye en la segunda ecuación:

$$56-6y=26$$
$$6y=30$$
$$y=5.$$

Resolver por eliminación por reducción los sistemas siguientes:

1. $\left.\begin{array}{l}8x+3y=30\\5x-3y=9\end{array}\right|$ 2. $\left.\begin{array}{l}9x+5y=83\\4x+5y=48\end{array}\right|$

3. $\left.\begin{array}{l}13x-9y=50\\10x-9y=26\end{array}\right|$ 4. $\left.\begin{array}{l}3x+5y=28\\4x-3y=18\end{array}\right|$

5. $\left.\begin{array}{l}16x-5y=125\\7x-4y=42\end{array}\right|$ 6. $\left.\begin{array}{l}6x+15y=117\\5x+13y=100\end{array}\right|$

7. $\left.\begin{array}{l}13x-12y=30\\9x+4y=70\end{array}\right|$ 8. $\left.\begin{array}{l}6x+8y=124\\7x+4y=94\end{array}\right|$

9. $\left.\begin{array}{l}20x-24y=36\\17x-8y=105\end{array}\right|$ 10. $\left.\begin{array}{l}3x+12y=111\\7x-8y=7\end{array}\right|$

11. $\left.\begin{array}{l}8x+9y=61\\6x-12y=2\end{array}\right|$ 12. $\left.\begin{array}{l}9x+10y=104\\6x+15y=111\end{array}\right|$

13. $\left.\begin{array}{l}15x-18y=36\\12x-12y=48\end{array}\right|$ 14. $\left.\begin{array}{l}24x+20y=360\\36x-30y=180\end{array}\right|$

87. Casos especiales.

a) $$\begin{array}{l}x+y=24\\x-y=6\end{array}$$

Sumando y restando sucesivamente las ecuaciones se encuentran:

$$\begin{array}{r}2x=30\\2y=18\\x=15\\y=9\end{array}$$

b) $$\left.\begin{array}{l}8x+5y=146\\5x+8y=140\end{array}\right|$$

$$\begin{array}{r}13(x+y)=286\\3(x-y)=6\\x+y=22\\x-y=2\\x=12\\y=10\end{array}$$

Expresar en palabras la sucesión del cálculo. Aplicar el método en los siguientes sistemas:

1. $\left.\begin{aligned} 5x+3y&=21 \\ 3x+5y&=19 \end{aligned}\right|$ 2. $\left.\begin{aligned} 7x+5y&=26 \\ 5x+7y&=22 \end{aligned}\right|$

3. $\left.\begin{aligned} 7x-5y&=18 \\ 5x-7y&=6 \end{aligned}\right|$ 4. $\left.\begin{aligned} 9x-4y&=78 \\ 4x-9y&=13 \end{aligned}\right|$

5. $\left.\begin{aligned} 8x-3y&=18 \\ 8y-3x&=7 \end{aligned}\right|$ 6. $\left.\begin{aligned} 10x-6y&=50 \\ -6x+10y&=2 \end{aligned}\right|$

7. $\left.\begin{aligned} 2x-3y&=3a+7b \\ 3x-2y&=7a+3b \end{aligned}\right|$ 8. $\left.\begin{aligned} 5x+3y&=9a-b \\ 3x+5y&=9b-a \end{aligned}\right|$

c) En sistemas de la forma:

$$\left.\begin{aligned} \frac{9}{x}+\frac{8}{y}&=5 \\ \frac{12}{x}-\frac{4}{y}&=3 \end{aligned}\right|$$

conviene elegir como incógnita los valores recíprocos de las incógnitas y, para mayor facilidad, aprovechar incógnitas auxiliares para estos valores, por ejemplo:

$$\frac{1}{x}=u\ ,\quad \frac{1}{y}=v.$$

Se sustituye en el sistema y resulta:

$$\left.\begin{aligned} 9u+8v&=5 \\ 12u-4v&=3 \end{aligned}\right| .\ 2$$

$$\begin{aligned} 33u\quad &=11 \\ u\quad &=\tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la 1.ª ecuación se tiene:

$$\begin{aligned} 8v&=2 \\ v&=\tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{3},\ x=3$$

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{4},\ y=4.$$

Análogamente se procede en un sistema de la forma:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{x}+\sqrt{y}&=2a \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}&=2b \end{aligned}\right|$$

eligiendo como incógnitas $\sqrt{x}$ y $\sqrt{y}$.

Resolver los sistemas:

1. $\left.\begin{aligned} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=\frac{5}{6} \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}&=\frac{1}{6} \end{aligned}\right|$ 2. $\left.\begin{aligned} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}&=\frac{1}{6} \end{aligned}\right|$

3. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=11 \\[2ex] \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=28 \end{array}\right|$ 4. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}=2 \\[2ex] \dfrac{9}{x}-\dfrac{10}{y}=1 \end{array}\right|$

5. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{12}{x}+\dfrac{15}{y}=5 \\[2ex] \dfrac{18}{x}-\dfrac{5}{y}=2 \end{array}\right|$ 6. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{24}{x}+\dfrac{33}{y}=15 \\[2ex] \dfrac{36}{x}-\dfrac{9}{y}=3 \end{array}\right|$

7. $\left.\begin{array}{l} 3\sqrt{x}-4\sqrt{y}=9 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=4 \end{array}\right|$ 8. $\left.\begin{array}{l} 5\sqrt{x}+6\sqrt{y}=27 \\ 9\sqrt{x}-8\sqrt{y}=11 \end{array}\right|$

9. $\left.\begin{array}{l} \sqrt{x-7}+\sqrt{y-1}=5 \\ \sqrt{x-7}-\sqrt{y-1}=1 \end{array}\right|$

10. $\left.\begin{array}{l} 3\sqrt{x+5}-7\sqrt{y-8}=5 \\ 2\sqrt{x+5}-5\sqrt{y-8}=3 \end{array}\right|$

d) Una de las ecuaciones expresa **la razón** entre las incógnitas.

Ejemplo: $\left.\begin{array}{ll} \text{I} & x+y=12 \\ \text{II} & x:y=1:3 \end{array}\right|$

Se despeja y en II: $y=3x$
Se sustituye en I: $4x=12$
$\mathbf{x=3;\ y=9.}$

Aplicaciones:

1. $\left.\begin{array}{l} x+y=6 \\ x:y=1:4 \end{array}\right|$ 2. $\left.\begin{array}{l} 4x+3y=34 \\ x:y=2:3 \end{array}\right|$

3. $\left.\begin{array}{l} 5x-6y=1 \\ x:y=3:5 \end{array}\right|$ 4. $\left.\begin{array}{l} x+y=55 \\ x:y=2\frac{3}{4}:1\frac{5}{8} \end{array}\right|$

5. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+2}{x}=\dfrac{y+3}{y} \\[2ex] x+y=25 \end{array}\right|$ 6. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-7}{7} \\[2ex] x+y=40 \end{array}\right|$

7. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{5}{3} \\[2ex] x+y=20 \end{array}\right|$ 8. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{3x+4y}{3x-4y}=\dfrac{9}{7} \\[2ex] x-y=58 \end{array}\right|$

9. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{7}{3} \\[2ex] \dfrac{x+1}{y+1}=\dfrac{12}{5} \end{array}\right|$ 10. $\left.\begin{array}{l} (x+y):(y-x)=15:8 \\[2ex] 9x-\dfrac{3y+44}{7}=100 \end{array}\right|$

88. Sistema de tres ecuaciones simultáneas de primer grado con tres incógnitas.

Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+6y-6z=42 \\ 2x-9y+8z=-4 \\ 5x+3y-2z=62 \end{array}\right| \begin{array}{ll} \cdot\ 4 & \\ \cdot\ 3 & \cdot\ 1 \\ & \cdot\ 4 \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
18x - 3y &= 156 \\
\underline{22x + 3y} &\underline{= 244}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
40x &= 400 \\
x &= 10
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
220 + 3y &= 244 \\
3y &= 24 \\
y &= 8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
20 - 72 + 8z &= -4 \\
8z &= 48 \\
z &= 6
\end{aligned}
$$

Explicación.—Se elimina z en las dos primeras ecuaciones por eliminación por reducción, y del mismo modo se combinan las dos últimas ecuaciones. Resulta así el sistema

$$
\begin{aligned}
18x - 3y &= 156 \\
22x + 3y &= 244
\end{aligned}
$$

del cual se obtiene $x=10$ e $y=8$.

Sustituyendo estos valores en la segunda ecuación del sistema se encuentra que $z=6$.

En resumen, para resolver un sistema determinado de tres ecuaciones con tres incógnitas, se convierte, mediante uno de los procedimientos de eliminación, en un sistema equivalente de dos ecuaciones con dos incógnitas y se resuelve este sistema, aplicando el procedimiento ya tratado. El valor de la tercera incógnita se determina por sustitución de los valores de las dos primeras incógnitas en una de las ecuaciones del sistema.

En algunos sistemas de ecuaciones simultáneas se consigue la eliminación de una de las incógnitas con más rapidez, combinando las tres ecuaciones en vez de combinarlas de dos en dos. Así, en el sistema propuesto, la suma de las tres ecuaciones da:

$$10x = 100$$

de donde: $$x = 10.$$

Sustituyendo este valor en las dos primeras ecuaciones resulta el sistema:

$$
\begin{aligned}
6y - 6z &= 12 \\
-9y + 8z &= -24.
\end{aligned}
$$

Ejercicios

1. $\left.\begin{aligned} 4x - 3y &= 3 \\ 5x + y &= 37 \end{aligned}\right|$

2. $\left.\begin{aligned} 7x + 9y &= 66 \\ x + 8y &= 43 \end{aligned}\right|$

3. $\left.\begin{aligned} 6x + 5y &= 150 \\ 7x - 4y &= 57 \end{aligned}\right|$

4. $\left.\begin{aligned} 16x - 14y &= 56 \\ 15x - 9y &= 48 \end{aligned}\right|$

5. $\left.\begin{aligned} 8x + 9y &= 61 \\ 6x - 12y &= 2 \end{aligned}\right|$

6. $\left.\begin{aligned} 17x + 12y &= 109 \\ 10x - 8y &= 34 \end{aligned}\right|$

7. $\left.\begin{aligned} 26x + 45y &= 97 \\ 39x - 30y &= 48 \end{aligned}\right|$

8. $\left.\begin{aligned} 10x - 9y &= 12 \\ 25x - 12y &= 51 \end{aligned}\right|$

9. $\left.\begin{aligned} 15x + 14y &= 44 \\ 25x + 21y &= 71 \end{aligned}\right|$

10. $\left.\begin{aligned} 6x + 35y &= 53 \\ 9x - 14y &= 13 \end{aligned}\right|$

11. $\left.\begin{aligned} 15x + 16y &= 76 \\ 35x - 24y &= 116 \end{aligned}\right|$

12. $\left.\begin{aligned} 22x + 15y &= 96 \\ 33x - 10y &= 79 \end{aligned}\right|$

13. $$\left.\begin{array}{l} 28x+39y=95 \\ 21x-26y=16 \end{array}\right|$$

14. $$\left.\begin{array}{l} 63x-46y=29 \\ 42x+69y=96 \end{array}\right|$$

15. $$\left.\begin{array}{l} 13x+12y=28{,}7 \\ 12x+13y=28{,}8 \end{array}\right|$$

16. $$\left.\begin{array}{l} 5x+7y=49 \\ 7x+5y=47 \end{array}\right|$$

17. $$\left.\begin{array}{l} 7y-(9x-8)=38 \\ 7x-(y-5x+61)=1 \end{array}\right|$$

18. $$\left.\begin{array}{l} 24-(5x+8y)=10 \\ 25-(3x-7y+18)=34 \end{array}\right|$$

19. $$\left.\begin{array}{l} 3(4x+8y)=4(8x+3y) \\ 7(9x-5y)=2(5x-8) \end{array}\right|$$

20. $$\left.\begin{array}{l} 2(3x+5y+2)=3(5x+3y-1) \\ 4(6x+5y+4)=5(7x+6y-3) \end{array}\right|$$

21. $$\left.\begin{array}{l} 6(x-4)-5(y+1)=9 \\ 5(x-4)-6(y+1)=2 \end{array}\right|$$

22. $$\left.\begin{array}{l} 8(x-1)+9(y-6)=33 \\ 12(x-1)+5(y-6)=41 \end{array}\right|$$

23. $$\left.\begin{array}{l} 7(3x-2y)-8(2x-3y)=35 \\ 8(3x-2y)-7(2x-3y)=40 \end{array}\right|$$

24. $$\left.\begin{array}{l} 9(6x-y)-8(5x+2y)=-16 \\ 8(6x-y)-9(5x+2y)=-86 \end{array}\right|$$

25. $$\left.\begin{array}{l} (x-4)(y+7)=(x-3)(y+4) \\ (x+5)(y-2)=(x+2)(y-1 \end{array}\right|$$

26. $$\left.\begin{array}{l} (x+3)(y+5)=(x+1)(y+8) \\ (2x-3)(5y+7)=2(5x-6)(y+1) \end{array}\right|$$

27. $$\left.\begin{array}{l} (x-6)\ \ (y-3)=(x-4)\ \ (y-4) \\ (x-10)\ \ (y-1)=(x-9)\ \ (y-3) \end{array}\right|$$

28. $$\left.\begin{array}{l} (x+1):(y+1)=6:7 \\ (x-1):(y-1)=4:5 \end{array}\right|$$

29. $$\left.\begin{array}{l} (3x+2):(3y-4)=8:5 \\ (5x-4):(6y-4)=3:7 \end{array}\right|$$

30. $$\left.\begin{array}{l} (2x-3y):(3x-4y)=3:5 \\ (\ x-2\ ):(\ y+2\ )=1:3 \end{array}\right|$$

31. $$\left.\begin{array}{l} (x-3):(y-4)=3:4 \\ (x+3):(y+4)=4:3 \end{array}\right|.$$

32. $$\left.\begin{array}{l} (2x+3y-2):(5x-2y+9)=2:3 \\ (\ x+4y-1):(5x+4y-7)=1:2 \end{array}\right|$$

33. $$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y=17 \\[2ex] \frac{3}{4}x+\frac{2}{3}y=19 \end{array}\right|$$

34. $$\left.\begin{array}{l} \frac{5}{6}x+\frac{3}{4}y=16 \\[2ex] \frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y=4 \end{array}\right|$$

35. $$\left.\begin{array}{l} \frac{7}{9}x-\frac{5}{6}y=4 \\[2ex] \frac{5}{6}x-\frac{3}{4}y=6 \end{array}\right|$$

36. $$\left.\begin{array}{l} \frac{11}{12}x-\frac{11}{18}y=11 \\[2ex] \frac{7}{9}x-\frac{7}{12}y=14 \end{array}\right|$$

37. $\begin{cases} 2\frac{1}{4}x+1\frac{3}{10}y=53 \\ 5\frac{1}{6}x-2\frac{3}{4}y=7 \end{cases}$

38. $\begin{cases} 5\frac{3}{5}x-3\frac{5}{8}y=14 \\ 4\frac{7}{12}x-3\frac{8}{15}y=4 \end{cases}$

39. $\begin{cases} 2{,}4x+1{,}8y=30 \\ 3{,}6x+5{,}4y=61.2 \end{cases}$

40. $\begin{cases} 6{,}5x-4{,}5y=5 \\ 3{,}5x-1{,}8y=8{,}3 \end{cases}$

41. $\begin{cases} \frac{x-7}{3}+\frac{y-5}{2}=7 \\ \frac{x-7}{2}+\frac{y-5}{3}=8 \end{cases}$

42. $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=5 \\ \frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y=-1 \end{cases}$

43. $\begin{cases} \frac{2x+7y}{4}-\frac{x+7}{6}=4 \\ \frac{2x+7y}{6}-\frac{x+7}{3}=0 \end{cases}$

44. $\begin{cases} \frac{3x+2}{7}=5y \\ \frac{7x-12}{5}=y+12 \end{cases}$

45. $\begin{cases} \frac{9}{2x+3y}=\frac{11}{3x+2y} \\ \frac{1}{x-2y}=\frac{2}{3x-7} \end{cases}$

46. $\begin{cases} \frac{x+2}{3}-\frac{y+2}{5}=\frac{x-y}{2} \\ \frac{x-1}{2}+\frac{y+3}{3}=\frac{2(x+y)}{4} \end{cases}$

47. $\begin{cases} \frac{11-x}{2}+\frac{4x-8y-2}{9}=8-(y-x) \\ \frac{13+x}{7}+\frac{3x-8y}{3}=x+y-5\frac{1}{2} \end{cases}$

48. $\begin{cases} \frac{x}{6}+\frac{20-2y}{3}=\frac{5y}{6}-\frac{4y-19}{3} \\ \frac{x+5y}{6}+5=\frac{2y+31}{3} \end{cases}$

49. $\begin{cases} \frac{5x+3}{2}-\frac{5y+6}{3}=x-1 \\ \frac{5x-4}{3}-\frac{3y+1}{2}=y-1 \end{cases}$

50. $\begin{cases} \frac{4x-3y-19}{4}-\frac{x-2y+9}{6}=x \\ \frac{5x-4y+21}{6}-\frac{3x-2y-2}{9}=y \end{cases}$

51. $\left.\begin{array}{l}\frac{3}{4}(x-1)+\frac{5}{3}(y-2)=34\\[2mm]\frac{5}{3}(x+2)-\frac{3}{5}(y+3)=13\end{array}\right|$

52. $\left.\begin{array}{l}\frac{2}{3}(x+1)-\frac{3}{4}(y+1)=1\\[2mm]\frac{3}{4}(x+5)-\frac{5}{6}(y+5)=1\end{array}\right|$

53. $\left.\begin{array}{l}2x+3y=xy\\10x-9y=xy\end{array}\right|$ (*) 54. $\left.\begin{array}{l}10x-3y=2xy\\7y-6x=4xy\end{array}\right|$ (*)

55. $\left.\begin{array}{l}\frac{3}{x-4}+\frac{4}{y-1}=3\\[2mm]\frac{9}{x-4}-\frac{2}{y-1}=2\end{array}\right|$ (**)

56. $\left.\begin{array}{l}\frac{3}{2x-3y}+\frac{5}{y-2}=8\\[2mm]\frac{7}{2x-3y}+\frac{3}{y-2}=10\end{array}\right|$ (**)

(*) Divídase cada ecuación por xy o elimínese una de las incógnitas en los primeros miembros.

(**) Aprovéchense incógnitas auxiliares para las expresiones que se repiten:

$\frac{1}{x-4}=u.\ \frac{1}{y-1}=v.$

57. $\left.\begin{array}{l}\frac{5}{\sqrt{x-y}}-\frac{6}{\sqrt{x+y}}=3\\[2mm]\frac{2}{\sqrt{x-y}}-\frac{3}{\sqrt{x+y}}=1\end{array}\right|$ (*)

58. $\left.\begin{array}{l}3\sqrt{x+2}-\sqrt{x-y}=4\\2\sqrt{x+2}-\sqrt{x-y}=3\end{array}\right|$ (*)

59. $\left.\begin{array}{l}3\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}+2\sqrt{x-y}=10\\[2mm]2\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}+3\sqrt{x-y}=10\end{array}\right|$

60. $\left.\begin{array}{l}\frac{6}{x-5}+\frac{\sqrt{y-3}}{5}=3\\[2mm](x-5)\sqrt{y-3}=15\end{array}\right|$

61. $\left.\begin{array}{l}a^x\ .\ a^y=a^{15}\\x-y=3\end{array}\right|$ 62. $\left.\begin{array}{l}a^{2x-3}\ .\ a^{3y-2}=a^8\\3x+2y=17\end{array}\right|$

(*) Aprovéchense incógnitas auxiliares para las expresiones que se repiten.

63. $$\left.\begin{array}{l} a^{7x-9} \cdot a^2 = a^{8y-2} \cdot a^9 \\ b^{3x-5} \cdot b^7 = b^{4y-1} \cdot b^5 \end{array}\right|$$

64. $$\left.\begin{array}{l} \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[y]{a} = \sqrt[12]{a^7} \\ \sqrt[x]{a^3} : \sqrt[y]{a^4} = 1 \end{array}\right|$$

65. $$\left.\begin{array}{l} \sqrt[x+1]{a^3} \cdot a^{y+2} = \sqrt[4]{(a^3)^9} \\ \sqrt[x+1]{a^7} : a^{y-5} = a^2\sqrt[4]{a^3} \end{array}\right|$$

66. $$\left.\begin{array}{l} \sqrt[3]{a^{2x-1}} \cdot \sqrt[4]{a^{3y-1}} = a^8 \\ \sqrt[4]{b^{3x+5}} \cdot \sqrt[3]{b^{2y+1}} = b^{10} \end{array}\right|$$

67. $$\left.\begin{array}{l} \sqrt[x]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^y} = a^3 \\ \sqrt[x]{b^6} \cdot \sqrt{b^y} = b^5 \end{array}\right|$$

68. $$\left.\begin{array}{l} \sqrt[x]{a^3} = \sqrt[y]{a^2} \cdot \sqrt[10]{a} \\ \sqrt[y]{b^3} = \sqrt[x]{b^3} \cdot \sqrt[10]{b} \end{array}\right|$$

69. $$\left.\begin{array}{l} \sqrt[3]{m^{x-5}} : \sqrt[5]{m^{y-3}} = 1 \\ \sqrt[4]{m^{3x-1}} \cdot \sqrt[8]{m^{5y-1}} = m^{16} \end{array}\right|$$

70. $$\left.\begin{array}{l} x+y=7a+3b \\ x-y=7a-3b \end{array}\right|$$

71. $$\left.\begin{array}{l} ax+y=p \\ bx-y=q \end{array}\right|$$

72. $$\left.\begin{array}{l} 4x-3y=7a \\ 3x-4y=7b \end{array}\right|$$

73. $$\left.\begin{array}{l} 7x-5y=2(a+12b) \\ 5x-7y=2(12b-a) \end{array}\right|$$

74. $$\left.\begin{array}{r} (a+c)x-by=bc \\ x+y=a+b \end{array}\right|$$

75. $$\left.\begin{array}{r} x+y=m+n \\ nx+my=2mn \end{array}\right|$$

76. $$\left.\begin{array}{l} ax+by=a^2+b^2 \\ x : y \;=a : b \end{array}\right|$$

77. $$\left.\begin{array}{l} bx+ay=2a^2b+2ab^2 \\ x : y \;=a : b \end{array}\right|$$

78. $$\left.\begin{array}{c} ax+by=2 \\ ab(x+y)=a+b \end{array}\right|$$

79. $$\left.\begin{array}{l} ab(ax+by)=a^2+b^2 \\ ab(x-y)=a-b \end{array}\right|$$

80. $$\left.\begin{array}{l} a(x+y)-b(x-y)=2a \\ a(x-y)-b(x+y)=2b \end{array}\right|$$

81. $$\left.\begin{array}{l} (a+b)x-(a-b)y=4ab \\ (a-b)x+(a+b)y=2a^2-2b^2 \end{array}\right|$$

82. $$\left.\begin{array}{l} ax+by=2a \\ \\ x+1=\dfrac{a^2+b^2}{ab} \end{array}\right|$$

83. $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-y}{y}=a \\ \\ \dfrac{x+1}{x}=b \end{array}\right|$$

84. $$\begin{cases} \dfrac{x}{a+b} + \dfrac{y}{a-b} = \dfrac{1}{a-b} \\[2ex] \dfrac{x}{a+b} - \dfrac{y}{a-b} = \dfrac{1}{a+b} \end{cases}$$

85. $$\begin{cases} \dfrac{x}{a+b} - \dfrac{y}{a-b} = \dfrac{4ab}{b^2-a^2} \\[2ex] \dfrac{x+y}{a+b} - \dfrac{x-y}{a-b} = \dfrac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2} \end{cases}$$

86. $$\begin{cases} (a+b)x+(a-b)y = \dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2} \\[2ex] (a-b)x+(a+b)y = \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \end{cases}$$

87. $$\begin{cases} \dfrac{a}{x} + \dfrac{1}{y} = b \\[2ex] \dfrac{1}{x} - \dfrac{b}{y} = a \end{cases}$$

88. $$\begin{cases} \dfrac{a+b}{x} + \dfrac{a-b}{y} = a^2 \\[2ex] \dfrac{a-b}{x} - \dfrac{a-b}{y} = a \end{cases}$$

89. $$\begin{cases} x + y = 28 \\ x + z = 30 \\ y + z = 32 \end{cases}$$

90. $$\begin{cases} x + y = 23 \\ x - z = 3 \\ z - y = 4 \end{cases}$$

91. $$\begin{cases} x - y = 8 \\ x + z = 40 \\ y - z = 8 \end{cases}$$

92. $$\begin{cases} 3x + y = 18 \\ 3y + z = 10 \\ 3z + x = 8 \end{cases}$$

93. $$\begin{cases} x + 2y = 15 \\ y + 2z = 10 \\ z + 2x = 17 \end{cases}$$

94. $$\begin{cases} 2x + 3y = 29 \\ 2y + 3z = 19 \\ 3z + 2x = 23 \end{cases}$$

95. $$\begin{cases} 2x + 3y = 44 \\ 3x - 4z = 6 \\ 3y - 2z = 12 \end{cases}$$

96. $$\begin{cases} 2x + y = 40 \\ y + 3z = 34 \\ 3x - 2z = 29 \end{cases}$$

97. $$\begin{cases} x + y = \dfrac{7}{12} \\[2ex] y + z = \dfrac{9}{20} \\[2ex] x + z = \dfrac{8}{15} \end{cases}$$

98. $$\begin{cases} \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{4}y = 6 \\[2ex] \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{3}z = 6 \\[2ex] \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}z = 6 \end{cases}$$

99. $$\begin{cases} \dfrac{x+1}{y+1} = \dfrac{15}{16} \\[2ex] \dfrac{y+2}{z+2} = \dfrac{14}{15} \\[2ex] \dfrac{z+3}{x+3} = \dfrac{14}{13} \end{cases}$$

100. $$\begin{cases} \dfrac{x-1}{y-1} = \dfrac{2}{3} \\[2ex] \dfrac{y-2}{z-2} = \dfrac{5}{7} \\[2ex] \dfrac{z-3}{x-3} = 3 \end{cases}$$

101. $$\left.\begin{aligned} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=5\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}&=6\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}&=7 \end{aligned}\right|$$

102. $$\left.\begin{aligned} \frac{3}{x}-\frac{4}{y}&=1\\ \frac{5}{x}-\frac{9}{z}&=2\\ \frac{8}{y}-\frac{3}{z}&=3 \end{aligned}\right|$$

103. $$\left.\begin{aligned} x+y+z&=12\\ y&=x+1\\ z&=x+2 \end{aligned}\right|$$

104. $$\left.\begin{aligned} x+y+z&=44\\ x&=4z-31\\ y&=3z-21 \end{aligned}\right|$$

105. $$\left.\begin{aligned} x-y-z&=12\\ y-x&=z-34\\ z-y&=x-16 \end{aligned}\right|$$

106. $$\left.\begin{aligned} x+2y+3z&=80\\ y&=2x-11\\ z&=50-3x \end{aligned}\right|$$

107. $$\left.\begin{aligned} x+y+z&=100\\ x:y:z&=6:3:1 \end{aligned}\right|$$

108. $$\left.\begin{aligned} 5x+3y-2z&=56\\ x:y:z&=4:6:5 \end{aligned}\right|$$

109. $$\left.\begin{aligned} x+y+z&=72\\ x:y&=3:4\\ y:z&=4:5 \end{aligned}\right|$$

110. $$\left.\begin{aligned} 9x+8y+5z&=300\\ x:y&=2:3\\ y:z&=5:6 \end{aligned}\right|$$

111. $$\left.\begin{aligned} x+2y+3z&=22\\ y+2z+3x&=25\\ z+2x+3y&=25 \end{aligned}\right|$$

112. $$\left.\begin{aligned} 2x-y+3z&=14\\ 2y-z+3x&=24\\ 2z-x+3y&=10 \end{aligned}\right|$$

113. $$\left.\begin{aligned} 5x-3y-2z&=20\\ 7x-4y-6z&=20\\ 2x+3y-8z&=20 \end{aligned}\right|$$

114. $$\left.\begin{aligned} 3x+9y+8z&=41\\ 5x+4y-2z&=20\\ 11x+7y-8z&=35 \end{aligned}\right|$$

115. $$\left.\begin{aligned} 3x+4y-4z&=11\\ 5x-6y+8z&=45\\ 7x+8y-6z&=41 \end{aligned}\right|$$

116. $$\left.\begin{aligned} 9x-7y-6z&=18\\ 12x-14y+9z&=27\\ 18x-35y+15z&=0 \end{aligned}\right|$$

117. $$\left.\begin{aligned} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}&=12\\ \frac{3}{x}-\frac{4}{y}+\frac{5}{z}&=18\\ \frac{5}{x}-\frac{3}{y}+\frac{2}{z}&=13 \end{aligned}\right|$$

118. $$\left.\begin{aligned} \frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}&=14\\ \frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}&=15\\ \frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}&=16 \end{aligned}\right|$$

119. $$\left.\begin{aligned} \frac{1}{5}x+\frac{3}{4}y+z&=14\\ 2x-\frac{1}{2}y-\frac{2}{3}z&=12\\ x-\frac{5}{8}y+\frac{5}{6}z&=10 \end{aligned}\right|$$

120. $$\left.\begin{aligned} \frac{3}{4}x+\frac{3}{10}y+\frac{5}{6}z&=30\\ \frac{5}{6}x+\frac{4}{5}y-\frac{2}{3}z&=14\\ \frac{2}{3}x-\frac{3}{4}y+\frac{4}{9}z&=1 \end{aligned}\right|$$

121. $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}-\frac{z}{6}=4$

$\frac{x}{6}-\frac{y}{2}-\frac{z}{3}=-5$

$\frac{x}{3}-\frac{y}{10}+\frac{z}{2}=6$

122. $\frac{5x+7y}{x+y}=6$

$\frac{3(z-x)}{x-y+z}=1$

$\frac{2x+3y-z}{\frac{x}{2}+3}=4$

Problemas.

1. La suma de dos números es 64 y su diferencia 16. ¿Cuáles son los números?

2. Si el doble de un número se suma con el triple de otro, resulta 79. Si al triple del primero se resta el segundo, resulta 36. ¿Cuáles son los números?

3. Si se aumenta el primero de dos números en el triple del segundo, se obtiene 39. Si se aumenta el segundo en el triple del primero, se obtiene 93. ¿Cuáles son los números?

4. La suma de dos números dividida por 4 es 10 y la diferencia de ellos multiplicada por 8 es 48. ¿Cuáles son los números?

5. La diferencia de dos números es a su producto como 1 : 30; la suma de los valores recíprocos de los números es $\frac{2}{15}$. ¿Cuáles son los números?

6. Dos números están en la razón de 5 : 3. Si se resta 10 del primero y se agregan 10 al segundo, resulta la razón inversa. ¿Cuáles son los números?

7. Buscar dos números, de modo que el doble del mayor sea igual a la suma de los números más 62 y que el doble del menor sea igual a la diferencia de los números menos 8.

8. Si el primero de dos números se aumenta en 2, son entre sí como 4 : 5, si el segundo se aumenta en 2, son entre sí como 2 : 3. ¿Cuáles son los números?

9. El cuociente de dos números es 6 y el resto 11. ¿Cuáles son estos números, si la suma de ellos es 179?

10. Dividiendo la suma de dos números por su diferencia, resulta 3 como cuociente y 6 de resto. El triple del primer número excede en 31 al duplo del segundo. ¿Cuáles son los números?

11. Buscar dos números que cumplan con las siguientes condiciones: dividiendo el segundo por el primero, resulta 2 como cuociente y 3 de resto; dividiendo la suma del primero con 12 por el segundo, resulta 1 como cuociente y 3 de resto.

12. Hace 5 años la edad de un padre era el cuádruplo de la de su hijo; 5 años después de la edad actual, la edad del padre será $2\frac{1}{2}$ veces la de su hijo. ¿Cuál es la edad de cada uno?

13. Hace 7 años A tenía la mitad de la edad de B; dentro de 5 años A tendrá los $\frac{3}{4}$ de la edad de B. ¿Cuál es la edad de cada uno?

14. Un padre dijo a sus dos hijos, de los cuales uno tiene 4 años más que el otro: «Hace 6 años yo tenía 6 veces la edad de ustedes juntos; en 2 años más, sólo tendré el doble de la suma de sus edades». ¿Cuál es la edad de cada uno?

15. 10 kilogramos de té y 8 de café valen E° 52,80; 15 kilogramos del mismo té y 6 del mismo café valen E° 57,60. ¿Cuál es el valor del kilogramo de té y del kilogramo de café?

16. Si se mezclan pinturas en la razón de 4 a 5, hay que vender el litro a E° 5; pero si se mezcla en la razón de 3 a 2, hay que vender el litro a E° 4,86. ¿Cuánto vale el litro de cada clase de pinturas?

17. 50 kg de trigo y 30 kg de centeno se venden en E° 6,86; a los mismos precios, 40 kg de trigo y 20 kg de centeno valen E° 5,16. ¿Cuánto vale el kilogramo de cada especie?

18. Dos obreros que trabajaron en una obra durante 15 y 12 días, respectivamente, ganaron en suma E° 24,60. Si el primero hubiera trabajado durante 12 días y el segundo 15, habrían ganado en suma E° 24. ¿Cuánto ganaba cada uno al día?

19. El jornal de un obrero A es $\frac{1}{3}$ más que el de otro B. Al fin de cierto tiempo A, que ha trabajado 5 días más que B, recibe E° 30, mientras que B recibe E° 18. ¿Cuánto gana cada obrero al día?

20. Se ha repartido la suma de E° 1 416 entre dos personas, de modo que retirando la primera $\frac{4}{7}$ de su parte y la segunda $\frac{3}{11}$ de la suya, quedan saldos iguales. ¿Cuánto recibe cada persona?

21. Un comerciante en muebles compró 3 mesas y 2 sillas en E° 75. Vendió las mesas con 10% y las sillas con 20% de ganancia y recibe por todo E° 85,50. Calcular el valor de cada mesa y de cada silla.

22. Un comerciante cancela dos facturas con E° 30 600, haciéndole 5% de descuento en la primera y 10% en la segunda. Si le hubieran descontando 10% en la primera factura y 8% en la segunda, habría cancelado las dos facturas con E° 30 000. ¿Cuál era el valor de cada factura?

23. Calcular los pesos de dos pedazos de fierro, sabiendo que los $\frac{2}{5}$ del primero pesan 96 kg menos que los $\frac{3}{4}$ del segundo, y que los $\frac{5}{5}$ del segundo pesan tanto como $\frac{4}{9}$ del primero.

24. Un objeto compuesto de oro y plata pesa 592 g. Su volumen es 41 cm^3. Calcular el peso del oro y de la plata que contiene, sabiendo que un centímetro cúbico de oro pesa 19 gramos y que uno de plata pesa 10,5 gramos.

25. La suma, la diferencia y el producto de dos números son entre sí como 5 : 3 : 16. ¿Cuáles son los números?

26 La suma de las cifras de un número de dos cifras es 9. Invirtiendo las cifras resulta un número que tiene 9 unidades más que el cuádruplo del número primitivo. ¿Cuál es el número?

27. La cifra de las decenas de un número de dos cifras es $\frac{2}{3}$ de la cifra de las unidades. Invirtiendo las cifras resulta un número que tiene 18 unidades más que el primitivo. ¿Cuál es el número?

28. Dos números de dos cifras se diferencian sólo en la colocación de éstas. La suma de los números es 99 y su diferencia 63. Calcular los números, considerando sus cifras como incógnitas.

29. Dividiendo un número de dos cifras por la cifra de las unidades se obtiene 9 como cuociente y 6 de resta. Invirtiendo las cifras y dividiendo el número por la cifra de sus unidades, resulta 12 como cuociente y 3 de resta. ¿Cuál es el número?

30. 10 m de un género de seda y 12 m de uno de lana valen, deduciendo el 2% de descuento, E° 207,76; 4 m del mismo género y 6 m del segundo, con 4% de descuento, valen E° 88,32. ¿Cuál es el precio del metro de cada género?

31. Dos capitales invertidos en bonos del 7% y del 8%, respectivamente, producen E° 760 anuales. Estos bonos, cotizados a 84 y 92%, respectivamente, valen en suma E° 8.800. Calcular los capitales en bonos.

32. La suma de los intereses anuales de E° 4 250 y E° 5 480 es E° 529. Si en estos capitales se cambian los tantos por ciento, los intereses anuales suman E° 541,30. Calcular los tantos por ciento.

33. Si una de dos llaves de agua queda abierta durante 25 y la otra durante 28 minutos, suministran 1 465 l de agua entre las dos. Pero si la primera queda abierta 20 y la segunda 21 minutos, sólo suministran 1 130 l de agua. ¿Cuántos litros de agua suministra cada llave por minuto?

34. Un depósito puede llenarse por una llave de agua y vaciarse por otra. Si la primera se abre 10 minutos antes de la segunda, 15 minutos después de abierta la segunda, el depósito contiene 170 l de agua. Si la primera llave se abre 20 minutos antes de la segunda, 40 minutos después de abierta la primera, el depósito contiene 320 l de agua. ¿Cuántos litros de agua suministra por minuto cada llave?

35. Dos conductos de agua llenan un depósito, si el primero permanece abierto por 15 y el segundo por 18 minutos. Si el primero se abre por 12 y el segundo por 15 minutos, se

alcanza a llenar $\frac{41}{50}$ del depósito. ¿En cuántos minutos se llenaría el depósito por cada uno de los conductos separadamente?

36. Dos conductos de agua llenan un depósito en tiempos que son entre sí como 5 : 6. Si los dos conductos se abren al mismo tiempo, después de 15 minutos faltan sólo 60 l para que el depósito quede lleno. Pero si el primer conducto se abre 3 minutos antes del segundo, 18 minutos después de abierto el primero, ya se han derramado 12 l. ¿Cuántos litros mide el depósito y cuántos minutos necesita cada conducto para llenarlo?

37. Un vapor recorre la distancia de 84 km río arriba en 6 horas y río abajo en 4 horas. ¿Cuántos kilómetros recorre el agua por hora y cuántos el vapor en aguas tranquilas?

38. Dos móviles parten al mismo tiempo de dos puntos A y B, separados por una distancia de 140 m. Si van el uno hacia el otro, se encuentran a los 10 segundos, pero si van en la misma dirección (de A a B) se juntan 35 segundos después de la partida. ¿Cuál es la velocidad de cada uno?

39. Dos viajeros partieron al mismo tiempo de dos lugares separados por una distancia de 38 km y se encuentran 4 horas después. Si el primer viajero hubiera partido 1,9 horas antes del segundo, se habrían encontrado 3 horas después de la partida del segundo viajero. ¿Cuántos kilómetros hizo cada uno por hora?

40 Dos capitales colocados el primero al $3\frac{1}{2}$% y el segundo al 4% de interés, producen E° 520. Si el primero produjera 4% y el segundo $3\frac{1}{2}$% de interés, el interés sería E° 530. ¿Cuáles son los dos capitales?

41. Uno de dos capitales produce, al 4%, E° 20 más que el otro al 5%. Si se cambian los tantos por ciento, el primer capital produce tanto más de E° 115 como el otro de menos. Calcular los capitales.

42. Si un capital se aumenta en mil escudos y el tanto por ciento se disminuye en $\frac{1}{2}$, los intereses anuales disminuyen en E° 35; pero si el capital se disminuye en E° 500 y el tanto por ciento se aumenta en $\frac{1}{2}$, los intereses anuales aumentan en E° 50. ¿Cuál es el capital y el tanto por ciento?

43. La cuarta parte de un capital al $3\frac{1}{2}$% y $\frac{2}{5}$ de otro al $4\frac{1}{2}$%, producen en 4 años E° 500. Los restos de estos capitales al 3 y 4%, respectivamente, producen en 3 años E° 630. Calcular los capitales.

44. Si se aumenta la base de un paralelógramo en 3 m y la altura en uno, el área aumenta en 30 m², y si se disminuye la base en 2 m y la altura se aumenta en 2, el área aumenta en 10 m². Calcular la base y la altura.

45. En un triángulo la diferencia de los ángulos α y β es igual a 40°, y la diferencia entre α y γ es igual a 50°. ¿Cuánto miden los ángulos del triángulo?

46. Aumentando la base de un triángulo en 6 m y la altura en 4 m el área aumenta en 120 m², y aumentando la base en 2 m y la altura en 9 m el área aumenta en 160 m². Calcular la base y la altura.

47. Si en un triángulo rectángulo se aumenta un cateto en 20 m y el otro en 2 m, el cuadrado construido sobre la hipotenusa crece en 2 040 m² y el área del triángulo en 150 m². Calcular los catetos.

48. Sobre la misma hipotenusa se construyen dos triángulos rectángulos. Los catetos del segundo triángulo miden 4 m menos y 8 m más, respectivamente, que los catetos correspondientes del primero. El área del segundo triángulo es 66 m² mayor que el área del primero. Calcular los catetos del primer triángulo.

49. Las distancias entre las aldeas A, B y C, no situadas en línea recta, están relacionadas en la forma siguiente:

La distancia entre A y B, pasando por C, es 81,5 km; la distancia de A a C, pasando por B, es 75,5 km; y la B a C, pasando por A es 71 km. Calcular las distancias en línea recta de A a B, de B a C y de C a A.

50 Los lados de un triángulo miden 30 cm, 50 cm y 80 cm, respectivamente. Calcular los lados de un triángulo semejante al primero, cuyo perímetro es de 9,6 m.

51. En un tren tres boletos de distinta clase para un mismo pueblo valen E° 2,70. Tres boletos de 1.ª clase con dos de 2.ª y uno de 3.ª valen en suma E° 6; dos boletos de 1.ª clase con 4 de 2.ª y 5 de tercera valen E° 9. ¿Cuál es el valor del boleto de cada clase?

52. Una persona pagó E° 44,50 por 3 pavos, 9 gallinas y 13 pollos; sin variar los precios, paga E° 56 por 8 pavos, 6 gallinas y 8 pollos y por una tercera partida de 4 pavos, 3 gallinas y 6 pollos pagó, conservando los precios anteriores, E° 30. Calcular el precio de cada pavo, cada gallina y cada pollo.

53. La suma $\alpha + \gamma$ de los ángulos de un triángulo es el doble del tercer ángulo β y la diferencia entre α y β es igual a la mitad del ángulo γ. Calcular los ángulos.

54. El perímetro de un triángulo es 114 cm. El lado menor es igual a los $\frac{5}{14}$ de la suma de los otros dos y a la diferencia de éstos le falta 6 cm para los $\frac{3}{5}$ del lado menor. Calcular los lados.

55. Cada uno de tres hermanos se propone reunir E° 99 000. El primero para completar el capital, le falta $\frac{1}{4}$ del capital del 2.° y $\frac{1}{8}$ del capital del tercero; el segundo necesita, para reunir el capital proyectado $\frac{2}{9}$ del capital del primero y $\frac{1}{6}$ del capital del tercero; el tercero necesita para completar el capital de E° 99 000, los $\frac{3}{10}$ del capital del segundo menos $\frac{1}{6}$ del capital del primero. ¿Cuál es el capital de cada hermano?

56. Repartir E° 2 505 entre tres personas de modo que la parte de la 1.ª y la de la 2.ª estén en la razón de 6 : 7, y la de la 2.ª con la de la 3.ª en la razón de 8 : 9.

57. Calcular los términos de una proporción discontinua conociendo la suma 15 de los dos primeros términos, la suma 13 del primero con el tercero y la diferencia 8 del cuarto con el tercero.

58. La suma de las cifras de un número de tres cifras es 10. Las unidades son 4 más que las decenas. Permutando las centenas con las unidades resulta un número que tiene 99 unidades más que el primero. ¿Cuál es el número?

CAPITULO XV

89. Algunos sistemas sencillos de ecuaciones de segundo grado.

a) Resolver los sistemas de la forma:

1) $\begin{cases} x \pm y = a \\ xy = b. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \pm y = a \\ x^2 + y^2 = b. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ xy = b. \end{cases}$

Sean los ejemplos siguientes, con el desarrollo de la resolución:

1.

$$\begin{aligned} x+y&=10 \\ xy&=24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2+2xy+y^2&=100 \\ -4xy&=-96 \\ \hline x^2-2xy+y^2&=4 \\ (x-y)^2&=4 \\ x-y&=\pm 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y&=10 \\ x-y&=\pm 2 \end{aligned}$$

$$x'=6,\ x''=4$$
$$y'=4,\ y''=6$$

2.

$$\begin{aligned} x+y&=10 \\ x^2+y^2&=52 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2+2xy+y^2&=100 \\ x^2+y^2&=52 \\ \hline 2xy&=48 \\ x^2-2xy+y^2&=4 \\ (x-y)^2&=4 \\ x-y&=\pm 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y&=10 \\ x-y&=\pm 2 \end{aligned}$$

$$x'=6,\ x''=4$$
$$y'=4,\ y''=6$$

3. $\left.\begin{aligned} x^2+y^2 &= 52 \\ xy &= 24 \end{aligned}\right| \;.\; 2$

$$x^2+2xy+y^2 = 100$$
$$x^2-2xy+y^2 = \quad 4$$

$$(x+y)^2 = 100$$
$$(x-y)^2 =$$

$$x+y = \pm 10$$
$$x-y = \pm\ 2$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 6, & y_1 &= 4 \\ x_2 &= -6, & y_2 &= -4 \\ x_3 &= 4, & y_3 &= 6 \\ x_4 &= -4, & y_4 &= -6. \end{aligned}$$

El desarrollo del cálculo en los tres ejercicios expresa que la idea del método es reducir cada sistema a otro con la suma y diferencia de las incógnitas.

Los sistemas de la forma del sistema 1), se pueden resolver también considerando las incógnitas como raíces de una ecuación de segundo grado completa particular, y formar esta ecuación, aprovechando las propiedades de las raíces, como se nota a continuación:

$$\left.\begin{aligned} x+y &= 10 \\ xy &= 24 \end{aligned}\right|$$

$$\begin{aligned} z^2-10z+24 &= 0 \\ z &= 5 \pm 1 \\ z' &= x = 6 \\ z'' &= y = 4. \end{aligned}$$

b) Si una de las ecuaciones es de segundo grado y la otra de primer grado, se aplica generalmente el método de eliminación por sustitución.

Ejemplo: $\left.\begin{aligned} x^2+y^2 &= 52 \\ x-y &= 2 \end{aligned}\right|$

$$x = y+2$$
$$(y+2)^2+y^2 = 52$$

De donde: $y' = 4, \quad y'' = -6$

y luego: $x' = 6, \quad x'' = -4$

Ejercicios.

1. $\left.\begin{aligned} x+y &= 27 \\ xy &= 180 \end{aligned}\right|$

2 $\left.\begin{aligned} 3x+3y &= 54 \\ 5xy &= 400 \end{aligned}\right|$

3. $\left.\begin{aligned} x-y &= 9 \\ xy &= 70 \end{aligned}\right|$

4. $\left.\begin{aligned} x+y &= 13 \\ x^2+y^2 &= 89 \end{aligned}\right|$

5. $\left.\begin{aligned} x-y &= 6 \\ x^2+y^2 &= 180 \end{aligned}\right|$

6. $\left.\begin{aligned} x^2+y^2 &= 52 \\ xy &= 24 \end{aligned}\right|$

7. $\left.\begin{aligned} x^2+3xy+y^2 &= 151 \\ xy &= 30 \end{aligned}\right|$

8. $\left.\begin{aligned} x+y+xy &= 23 \\ x+y &= 9 \end{aligned}\right|$

9. $\left.\begin{aligned} x^2-3xy+y^2 &= -31 \\ x^2+y^2 &= 89 \end{aligned}\right|$

10. $\left.\begin{aligned} x^2-xy+y^2 &= 112 \\ x-y &= 4 \end{aligned}\right|$

11. $\begin{cases} x^2+3xy+y^2 = 316 \\ \dfrac{x+y}{16} = 1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2-3\sqrt{xy}+y^2 = 395 \\ xy = 100 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^2+y^2=520 \\ x^2-y^2=128 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=39 \\ 2x^2-3xy+2y^2=43 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2-y^2=640 \\ x : y=7 : 3 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=151 \\ x^2-xy+y^2=61 \end{cases}$

17. $\begin{cases} (x+y)^2+(x-y)^2=274 \\ xy=44 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x^2+9y^2=136 \\ x-3y=4 \end{cases}$

19. $\begin{cases} (x+y)^2-(x-y)^2=884 \\ x^2+xy+y^2=679 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x^2-xy=14 \\ xy-y^2=10 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x^2+xy+y=121 \\ y^2+xy+x=61 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x^2-y^2=81 \\ x+y=27 \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}=9 \\ x^2-y^2=81 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x^2-y^2=44 \\ xy-y^2=20 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x^2+y^2+xy=433 \\ x^2+y^2=290 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x+xy+y=34 \\ x^2+xy+y^2=76 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^2+y^2=193 \\ x^2-xy+y^2=109 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x^2-3y^2=6 \\ 3x^2-2y^2=19 \end{cases}$

29. $\begin{cases} (x-y)^2-3x=4-3y \\ xy=45 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x^2+y^2=100 \\ x : y=3 : 4 \end{cases}$

31. (1) $\begin{cases} (x^2+y^2)(x+y)=1\,080 \\ (x^2+y^2)(x-y)=540 \end{cases}$

Problemas.

1. La suma de dos números es 30 y su producto 200. ¿Cuáles son los números?

2. La diferencia de dos números positivos es 8 y la suma de sus cuadrados es 544. ¿Cuáles son los números?

3. La diferencia de los catetos de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa mide 17 cm, es 7. Calcular los catetos.

4. La suma de los catetos de un triángulo rectángulo, de área igual a 42 m², es 31 m. Calcular los catetos.

5. La hipotenusa de un triángulo rectángulo, de área igual a 210 m², mide 37. ¿Cuánto miden los catetos?

6. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 25 m y la altura sobre la hipotenusa 12 m. ¿Cuánto miden los segmentos de la hipotenusa determinados por la altura y cuánto los catetos?

7. La diferencia de los lados contiguos de un rectángulo es 10 m y el área del rectángulo es 375 m². ¿Cuánto miden los lados del rectángulo?

(1) Combinando las dos ecuaciones, determínese primero la razón $\frac{x}{y}$

8. El perímetro de un rectángulo, cuya diagonal mide 100 m, es 280 m. Calcular los lados.

9. El área de un rectángulo es 240 m^2 y la diagonal mide 26 m. ¿Cuánto miden los lados?

10. Un rectángulo de perímetro igual a 200 m, es equivalente a un cuadrado, cuyo perímetro es 192 m. ¿Cuánto miden los lados del rectángulo?

11. La altura a la base y la altura al lado de un triángulo isósceles miden 20 y 24 cm, respectivamente. ¿Cuánto miden la base y el lado del triángulo?

12. El perímetro de un triángulo isósceles es 40 m. Trazando la bisectriz de un ángulo de la base el segmento superior del lado opuesto resulta con 3 m más que el inferior. ¿Cuánto miden la base y los lados del triángulo?

13. ¿Qué longitud tienen la base y la altura de un triángulo isósceles, cuya superficie es 660 cm^2 y cuyo lado mide 61 cm?

14. El lado de un rombo, cuyos vértices se encuentran en los puntos medios de los lados de un rectángulo de 124 cm de perímetro, mide 25 cm. ¿Qué largo tienen los lados del rectángulo?

15. El perímetro de un triángulo rectángulo mide 24 m y el radio del círculo inscrito 2 m. ¿Cuánto miden los tres lados del triángulo?

16. Cierto número de personas tenían que pagar E° 840 de una deuda. Si las personas hubieran sido 3 más y cada una hubiera gastado E° 10 más, la deuda habría sido de E° 1 200. ¿Cuántas eran las personas y cuánto tuvo que pagar cada una?

17. E° 25 000 producen, a cierto tanto por ciento y después de cierto número de años, E° 5 000

de interés. Habrían producido lo mismo si hubieran estado un año más ganando intereses, pero a un tanto por ciento inferior en uno al anterior. Calcular el tiempo y el tanto por ciento.

18. La suma de dos números naturales más la de sus cuadrados es 396, y la diferencia de estos números más la diferencia de sus cuadrados es 84. ¿Cuáles son los números?

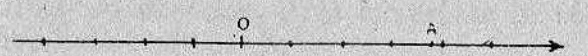
19. Dos círculos son tangentes interiormente. La línea de los centros tiene 8 cm y la suma de las áreas es 544 π cm^2. ¿Qué longitud tienen los dos radios?

CAPITULO XVI

REPRESENTACION GRAFICA

1. Determinación de un punto sobre una recta.

Se elige, en primer lugar, un punto origen sobre la recta, y a partir de él se aplican *trazos* iguales en ambos sentidos uno de estos sentidos se elige como positivo, el otro es el negativo.



A cada punto A de la recta se hace corresponder el número x (entero, fraccionario o irracional) que mide la distancia OA. Ese número x es la *abscisa* del punto A. Se escribe A(x).

La correspondencia entre puntos y números es *biunívoca*, es decir, a cada punto corresponde una abscisa y a cada abscisa corresponde un punto.

Ejercicios:

1. Representar los puntos A(3), B(—2), C(2,5) y D($\sqrt{2}$).

2. Si A(2) y B(5), verificar que AB = 3 y BA = —3.

3. Si A(—4) y B(7), verificar que AB = 11 y BA = — 11.

4. Mostrar que AB + BA = 0.

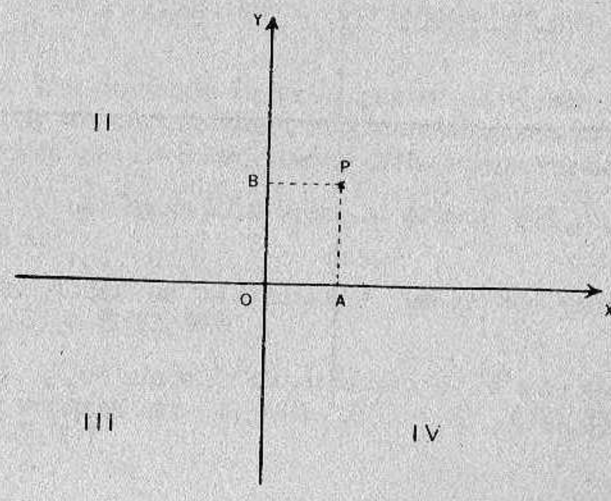
5. ¿Cuál es la distancia PQ si P(—8) y Q(—5)? ¿Cuál es la distancia QP?

6. Demostrar que la abscisa del punto medio M del trazo AB, si A(x') y B(x''), es $\frac{x'+x''}{2}$.

2. Determinación de un punto en el plano.

La ubicación de un punto en un plano necesita dos datos. Estos datos pueden referirse a dos rectas perpendiculares que dividen el plano en cuatro partes o *cuadrantes*, que se denominan, según la figura, I, II, III y IV.

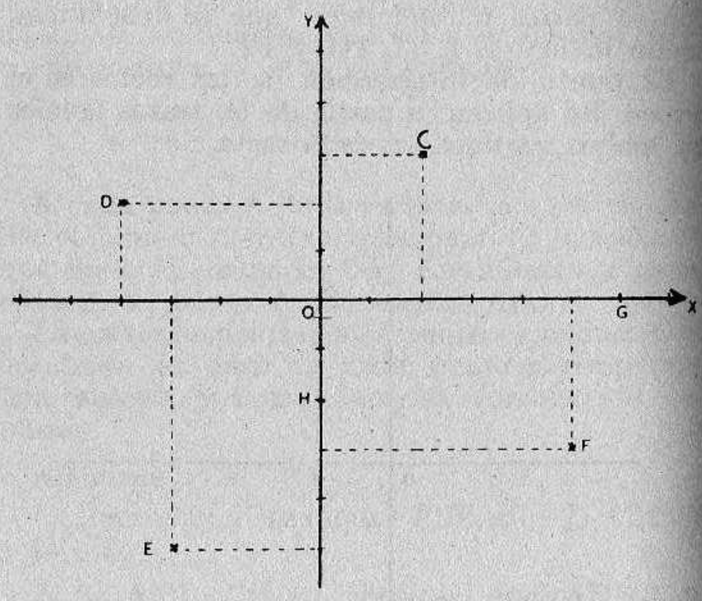
El punto de intersección de las rectas es el *origen*. Se aplican, a partir de él, trazos iguales en ambos sentidos en cada recta.



El eje OX se llama *eje de las abscisas* y el eje OY se llama *eje de las ordenadas*.

Por cada punto P del plano se trazan las paralelas a los ejes. La paralela al eje de las Y corta al eje de las X en el punto A; OA es la *abscisa* de P. La paralela al eje de las X corta al eje de las Y en el punto B; OB es la *ordenada* de P. Los números OA = x y OB = y son las *coordenadas* de P. Se denota: P(x, y).

Por ejemplo, las coordenadas del punto C se escriben C(2, 3). Análogamente se tiene D(—4, 2), E(—3, —5), F(5, —3), G(6, 0) y H(0, —2). Las coordenadas del origen son iguales a cero: O(0, 0).



Ejercicios:

1. Representar los puntos: A(—1, 1); B(0, 3); C($\sqrt{2}$, 1); D(2, $\sqrt{3}$); E(0, 5, —0,1), y F$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. ¿En qué cuadrante están los puntos M(—2, —2), N(—1, 1), P(1, 3) y Q(4, —2)?

3. ¿Dónde se encuentran los puntos para los cuales x = 5?

4. ¿Dónde se encuentran los puntos para los cuales y = 3?

5. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos para los cuales x = 0?

6. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos para los cuales y = 0?

7. Un triángulo equilátero de lado 8 tiene un lado en el eje de las X y su tercer vértice en el eje de las Y. ¿Cuáles son coordenadas de sus vértices?

8. Un cuadrado tiene su centro en el origen y uno de sus vértices tiene como coordenadas (4, 0). ¿Cuáles son las coordenadas de los otros vértices?

9. ¿Cuál es la distancia al origen, del punto P(3, 4)?

10. ¿Cuál es la distancia entre los puntos A(4, 3) y B(12, 9)?

11. ¿Qué clase de cuadrilátero es el que tiene sus vértices A(—3, —3), B(3, —3), C(3, 3) y D(—3, 3)?

12. Dibujar el cuadrilátero cuyos vértices son: A(—2, 0), B(6, 0), C(6, 4) y D(—2, 4). ¿Qué clase de cuadrilátero es? Calcular sus lados y su área.

13. Un triángulo tiene vértices A(—7, 0), B(0, 7) y C(0, 0). ¿Qué clase de triángulo es? Calcular sus lados.

14. Calcular la superficie del triángulo con vértices A(2, 0), B(10, 0) y C(5, 8).

15. ¿Qué clase de triángulo es aquel cuyos vértices son A(—8, 1), B(2, —1) y C(—4, 5)? Calcular sus lados.

16. El centro de una circunferencia es A(16, 12) y pasa por el origen. Determinar las coordenadas de sus intersecciones con los ejes.

17. El centro de una circunferencia es A(10, 0) y su radio es 15. Determinar las coordenadas de los puntos de intersección de la circunferencia con los ejes.

18. Un trapecio isósceles tiene vértices A(—5, 0), B(8, 0) y D(0, 12). Calcular las coordenadas del vértice C.

19. Un triángulo isósceles ABC tiene base AB. Las coordenadas de A son (2, 0) y las de B son (8, 0). ¿Cuál es el lugar geométrico del vértice C?

20. Un triángulo isósceles tiene vértices basales M(0, 3) y N(0, —3). ¿Dónde se encontrará el tercer vértice?

21. El centro de un triángulo equilátero ABC está en el origen y las coordenadas de C son (0, 4). ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices A y B?

22. Demostrar que los puntos (1, 1), (—3, —1) y (—4, 1) son los vértices de un triángulo rectángulo.

3. Representación de funciones.

Si el literal y no representa ya un número determinado, sino que puede tomar todos los valores de cierto intervalo, se dice que y es una *variable*.

Si y depende de otra variable x, de modo que los valores de y están determinados por los valores de x, se dice que *y es función de x*. Se escribe $y = f(x)$. x es la variable *independiente* e y es la variable *dependiente*.

$f(x)$ puede ser una expresión matemática cualquiera. Por ejemplo, en el movimiento uniformemente acelerado, la velocidad es función del tiempo

$$v = f(t)$$

y la expresión matemática es

$$v = vi + at.$$

Para representar gráficamente una función es necesario tener varios puntos del gráfico. Se obtienen dando valores numéricos a la variable independiente y calculando los respectivos valores de la variable dependiente. A continuación se unen los puntos por una línea continua.

Ejemplo 1.

Sea la función $y = x^2 + 2x$

Entonces, para $x = -3,\ y = (-3)^2 + 2\cdot(-3) = 3$

» $x = -2,\ y = (-2)^2 + 2\cdot(-2) = 0$

» $x = -1,\ y = (-1)^2 + 2\cdot(-1) = -1$

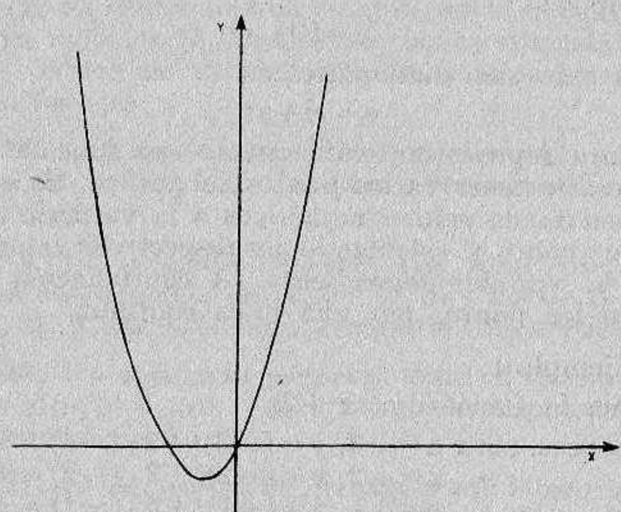
» $x = 0,\quad y = 0 + 2\cdot 0 \quad = 0$

para $x=1$, $y=1^2+2 \cdot 1 = 3$
» $x=2$, $y=2^2+2 \cdot 2 = 8$
» $x=3$, $y=3^2+2 \cdot 3 = 15$
» $x=4$, $y=4^2+2 \cdot 4 = 24$
etc.

Estos valores se pueden indicar más cómodamente mediante una tabla de valores:

x	—3	—2	—1	0	1	2	3	4
y	3	0	—1	0	3	8	15	24

El gráfico es:

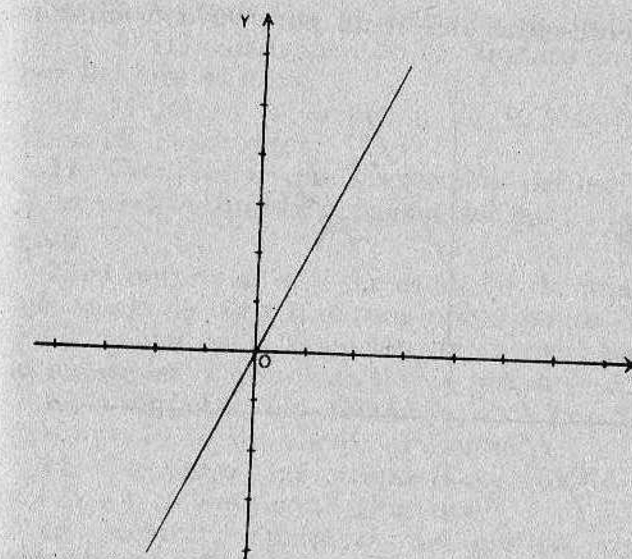


Ejemplo 2.

Sea la función $y=2x$.

La tabla de valores es:

x	—2	—1	0	1	2	3	4
y	—4	—2	0	2	4	6	8



Si se forman las razones $\frac{y_1}{x_1}, \frac{y_2}{x_2}, \frac{y_3}{x_3}, \ldots$ éstas son constantes e iguales a 2. Mediante la geometría elemental se demuestra que los puntos $P_1, P_2, P_3, \ldots$ están en línea recta. Entonces, la ecuación

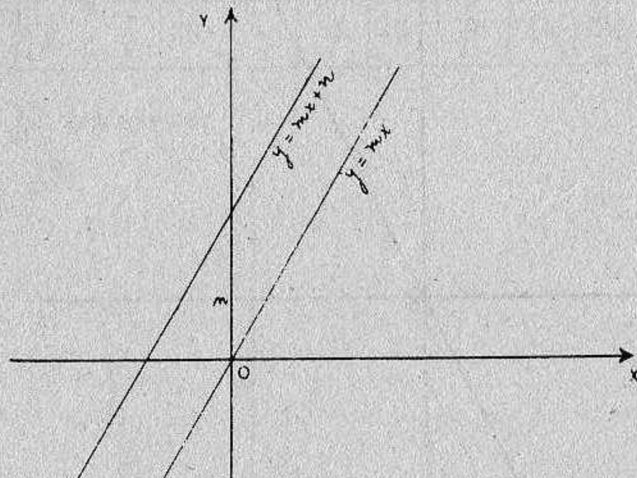
$$y = mx$$

en que m es una constante, representa una línea recta que pasa por el origen. Pasa por el origen porque la ecuación se satisface para $x=0$, $y=0$ que son las coordenadas del origen.

Si las ordenadas se aumentan en n, la nueva ecuación es

$$y = mx + n$$

que representa una recta *paralela a la anterior.*



Una ecuación de primer grado entre dos variables representa una línea recta.

La forma más general de escribirla es:

$$ax + by + c = 0$$

en que a, b y c son constantes.

Por esta razón se dice que la ecuación $ax+by+c=0$ es una *ecuación lineal.*

Ejercicios.

Representar gráficamente las rectas:

1. $y=-3x$.
2. $4x+3y=12$.
3. $3x-2y-6=0$.
4. $x-y=2$.
5. $x+y=5$.
6. $3x=4y$.
7. $x-3=0$.
8. $y-5=0$.
9. Demostrar que la ecuación de la bisectriz del I y III cuadrante de los ángulos formados por los ejes es $y=x$.
10. ¿Cuál es la ecuación de la bisectriz del II y IV cuadrantes?
11. Comprobar que la ecuación del eje de las X es $y=0$, y que la ecuación del eje de las Y es $x=0$.
12. Comprobar que la ecuación de una paralela al eje de las x que pasa por el punto (0, 3) es $y=3$. ¿Cuál es la ecuación de la recta paralela al eje de las y que pasa por el punto (—5, 0)?
13. Comparar las rectas L_1: $2x+3y=5$ y L_2: $4x+6y=10$. ¿Cómo son? ¿Por qué?
14. Comparar las rectas L_1: $y=3x+5$ y L_2: $y=3x+4$. ¿Cómo son? ¿Por qué?
15. Mostrar, mediante un gráfico, que las rectas $x+y=3$ e $y-x=4$, son perpendiculares.

4. *Resolución gráfica de un sistema de dos ecuaciones de primer grado.*

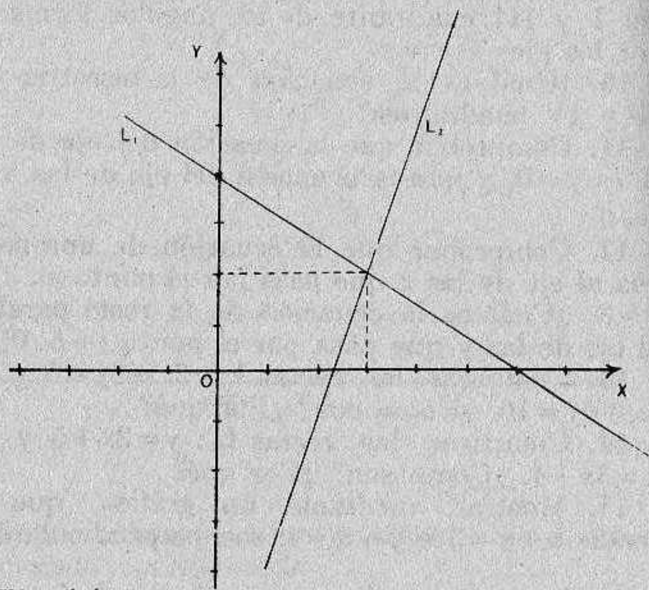
En un sistema de dos ecuaciones de primer grado en x e y existe sólo un par de valores de x e y que satisface al sistema. Existe, en consecuencia, un solo punto común a las dos rectas que corresponden a las ecuaciones.

Ejemplo:

Sea el sistema

$$\begin{aligned} 2x+3y&=12 \\ 3x-y&=7 \end{aligned}$$

Se dibujan las rectas L_1: $2x+3y=12$ y L_2: $3x-y=7$. Las coordenadas del punto de intersección de las rectas es la solución del sistema.



Ejercicios.

Resolver gráficamente los sistemas:

1. $\left.\begin{aligned} 2x-5y&=10 \\ x+2y&=4 \end{aligned}\right|$

2. $\left.\begin{aligned} 3x+5y&=15 \\ x-y&=0 \end{aligned}\right|$

3. $\left.\begin{aligned} x+2y&=10 \\ 3x-2y&=6 \end{aligned}\right|$

4. $\left.\begin{aligned} x\sqrt{5}+y\sqrt{3}&=2\sqrt{15} \\ x\sqrt{3}-2y\sqrt{5}&=-7 \end{aligned}\right|$

5. Determinar las coordenadas del punto de intersección de la recta $3x-5y=0$ con la perpendicular al eje de las ordenadas en el punto $(0, -4)$.

6. Determinar las coordenadas del punto de intersección de la recta $2x+y=8$ con la bisectriz de los cuadrantes I y III.

7. Determinar las coordenadas del punto de intersección de la recta $2x-5y=-4$ con la bisectriz de los cuadrantes II y IV.

8. Representar gráficamente las rectas $2x-3y=-6$, y $2x+3y=18$, y calcular las coordenadas de los vértices y el área del cuadrilátero formado por los dos ejes y las dos rectas.

9. Demuestre que las tres rectas siguientes se cortan en un solo punto

L_1: $9y=5x+65$

L_2: $5x+2y=-10$

L_3: $x+3y=11$.

10. Dibujar el triángulo cuyos lados están dados por las ecuaciones $3x-y=9$; $x+7y=11$, $3x+y=13$. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices?

11. Encontrar el área del triángulo limitado por el eje de las abscisas, la recta $y=3x$ y la recta $x=6$

12. Calcular el perímetro de un triángulo que tiene dos lados en los ejes y el tercer lado en la recta $7x+2y=14$.

13. Representar gráficamente la relación entre el perímetro de un triángulo equilátero y el lado cuando éste varía.

14. Id. entre la altura y el lado.

15. Id. entre el área y el lado.

16. Representar gráficamente la relación entre la diagonal y el lado de un cuadrado cuando éste varía.

17. Representar gráficamente la relación entre la temperatura medida en escala Celsius y en escala Fahrenheit.

18. Demostrar que la ecuación de una circunferencia que tiene por centro el origen y radio r es

$$x^2+y^2=r^2$$

19. ¿Qué figura representa la ecuación

$$(x-3)^2+(y-5)^2=36?$$

20. Resolver gráficamente el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 3x+4y=12 \\ x^2+y^2=25 \end{array}\right|$$

21. Haga el gráfico de las dos ecuaciones incompatibles $2x+5y=10$ y $2x+5y=8$. ¿Qué se puede decir de las rectas?

22. Haga el gráfico de las ecuaciones $7x+3y=21$ y $14x+6y=42$. ¿Qué características tienen las rectas? ¿Por qué?

23. ¿Cómo se podría resolver gráficamente la ecuación $x^3+3x^2-8x+1=0$?

EJERCICIOS DE RECAPITULACION FINAL

Este último grupo de ejercicios está dedicado especialmente a los candidatos a Bachiller en Matemáticas.

No están separados por grupos de materias porque el Bachillerato exige una comprensión completa y global de todas ellas.

Es conveniente que el alumno, antes de resolver estos ejercicios, haya resuelto los anteriores, especialmente los de Recapitulación de las págs. 135 y 220.

Recomiendo lo ya dicho en el Prefacio, que el alumno para tener una preparación cabal deberá resolverlos todos.

— • —

1. ¿En qué tiempo se llena un estanque que tiene 2,55 m de largo, 1,75 m de ancho y 2,30 m de profundidad mediante un grifo que suministra 2 litros en 8,5 seg?

2. ¿Qué conviene más para entablar una pieza rectangular de 3 m por 2 m, servirse de tablas de 3,3 m por 5 cm que valen E° 1,25 cada una, o de tablas de 3 m por 10 cm a E° 1,87 cada una?

3. ¿Cuántos km mide una tonelada de alambre de cobre de densidad 8,94 y sección circular de diámetro 4,5 mm?

4. Expresar la presión de 50 $\dfrac{\text{libra}}{\text{pulgada}^2}$ en $\dfrac{\text{kg—p}}{\text{cm}^2}$ y en atmósferas, si 1 pulgada = 2,54 cm, 1 libra = 453 gr y la densidad del Hg es 13,6.

5. Se ha rodeado un terreno de forma cuadrada por un muro de 0,20 m de espesor, con lo cual su área disminuyó en 42 m². ¿Cuál era el área primitiva del terreno expresada en hectáreas?

6. Un cajón de 75 cm por 56 cm y por 50 cm se hace de madera de $\frac{3}{4}$ pulgada. ¿Cuánto pesa si el peso específico de la madera es 0,72. 1 pulgada = 2,54 cm.

7. El ancho de una pieza es inferior en 3 pies a su largo. Si el largo se aumentara en 3 pies y el ancho se disminuyera en 2 pies, la superficie del piso no se alteraría. Encuentre sus dimensiones en metros sabiendo que 1 pie = 0,3048 m.

8. Calcule la razón entre las velocidades de un auto que va a 60 $\frac{\text{km}}{\text{hr}}$ y la de un exprinter que corre 100 m en 10,9 seg.

9. Una aleación de oro y cobre pesa 21 kg y su densidad es $12\frac{1}{4}$. ¿Cuánto contiene de cada metal si la densidad del oro es $19\frac{1}{4}$ y la del cobre es $8\frac{3}{4}$?

10. Un ángulo mide 63° 40' 30'' Calcular el valor de su complemento y su suplemento expresado en grados centesimales.

11. ¿A qué hora, entre las 3 y las 4, el horario y el minutero de un reloj forman un ángulo de 90°?

12. Las ruedas de una bicicleta tienen 60 cm de diámetro, y un ciclista pedalea en ella dándole 50 vueltas en 8 seg. ¿Cuántos km recorre en una hora?

13. Se pide resolver la ecuación

$$1{,}41666\ldots x - 2{,}1666\ldots = x - 0{,}58333\ldots x + 3.$$

14. Resolver, reduciendo las fracciones decimales a comunes, exactas, la ecuación

$$0{,}25x - 1{,}5 = 0{,}06464\ldots + 0{,}0363636\ldots$$

15. Evaluar la expresión

$$A = \frac{ab+bc+ca}{abc} : \left(\frac{b+a}{a} - \frac{b+c}{b}\right)$$

para $a = 1\frac{1}{3}$, $b = 2{,}5$, $c = 0{,}4$.

16. Calcular el valor de $a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}$ para $a = 0{,}001$, $b = 2 \cdot 10^{-3}$, $c = 0{,}002$.

17. Encontrar x con tres decimales

$$0{,}68\,(0{,}32x - \dot{0}{,}5) + \frac{x-5}{1{,}368} = 3{,}694x.$$

18. Reducir a fracción decimal la expresión

$$\frac{1+\dfrac{2}{3\frac{4}{5}}}{1-\dfrac{2}{3\frac{4}{5}}} : \left(1 + \frac{4}{9 - \dfrac{3}{1-\frac{3}{5}}}\right)$$

e indicar el período de ésta.

19. Se pide demostrar que

$$\frac{8{,}333\ldots}{2{,}777\ldots} = \frac{4{,}333\ldots}{1{,}444\ldots}$$

y determinar el valor de la razón.

20. Resolver la ecuación

$$\frac{x}{\frac{1}{2}(3-0{,}6)} = \frac{\frac{3}{5}-0{,}1}{0{,}1^2-1}$$

21. Calcular el valor de

$$\frac{(a+2)\,(a^3-\frac{a}{4})\,(a^2-2a+4)}{(a^2-\frac{a}{2})\,(a+\frac{1}{2})\,(a^3+8)}$$

para $a = 1{,}75 \cdot 10^{-3}$.

22. Calcular el valor de

$$5a^2 \quad \frac{1}{27} b^6 - 2abc \qquad \text{para} \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = \sqrt{3} \\ c = 0 \end{cases}$$

23. Calcular la expresión

$$\left[\frac{-0{,}5-(-1)^3}{(\frac{1}{2}-\frac{3}{2})^2 : 2}\right]^{-2}$$

24. Resolver la ecuación

$$0{,}75^x=(3+\tfrac{13}{81})^{-2}$$

25. Siendo $y=\frac{x-2}{x+2}$, se pide expresar $x+2$ y $x-2$ en función de y.

26. Calcular el valor que toma la expresión

$$A = 5(\tfrac{x}{2}-\tfrac{y}{3})\cdot(\tfrac{x}{3}-\tfrac{y}{2})$$

si $x=\frac{5}{4}$, $y=\frac{4}{3}$. ¿Qué ocurre con ella si $x:y=3:2$?

27. Verificar que el producto de la fracción $\frac{x^2-(a+b)x+ab}{x^2-(a-b)x-ab}$ por la fracción $\frac{x+b}{x-b}$ es igual a la unidad.

28. Probar que la razón $a:b$ entre dos números es diferente de la razón $(a+n):(b+n)$ o $(a-n):(b-n)$ cualquiera que sea n, siempre que a sea distinto de b.

29. Establecido que $(e+1):(e-1)=u$, se pide expresar e en función de u. Asimismo el valor $e+e^{-1}$ en función de u.

30. ¿Qué valor debe tener x en la expresión $\frac{3x^2+5}{4x^2-1}$ para que el valor de ella sea -7?

31. Resolver la ecuación

$$\frac{x^2+ax+b}{x+a}+\frac{x^2+cx+d}{x+c}=\frac{x^2+ax+e}{x+a}+\frac{x^2+cx+f}{x+c}$$

32. Resolver la ecuación

$$\frac{m+n}{x+m-n}-\frac{2m}{x-m+n}+\frac{m-n}{x-m-n}=0.$$

33. Resolver la ecuación

$$(x+a)^3+(x+b)^3+(x+c)^3=3(a+x)\,(b+x)\,(c+x).$$

34. Si $x=\frac{2t}{1+t^2}$, expresar en la forma más sencilla en función de t, el valor de $\frac{2-x}{2+x}$.

35. Si $x=5$ calcular **a** en la siguiente ecuación:

$$\frac{3x-a}{x-a}+\frac{x-a}{3x-a}=\frac{10}{3}$$

36. Resolver

$$\frac{a+b-x}{x^2}=\frac{a^2-b^2}{x^3}-\frac{1}{x}$$

37. Efectuar

$$\frac{1}{x-z}\cdot\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}-\frac{x}{yz}}{xyz}:\frac{x^3+y^3}{x^3y^3z^3}.$$

38. Efectuar

$$\sqrt{\left(\frac{a+1}{a-b}+\frac{5b+3a}{b^2-a^2}+\frac{3}{a-b}-\frac{a-1}{a+b}\right)\cdot\frac{\frac{1}{2}(a+b)}{(b-ab-a)(b-a)}}$$

39. Reducir a su forma más sencilla

$$\sqrt{\frac{a^3-b^3}{a+b}\cdot\frac{(a-b)^2+4ab}{(a+b)^2-ab}:\frac{a^2-b^2}{4}}$$

40. Efectuar

$$\sqrt{\left[\left(\frac{a^2}{3}+\frac{3a^2}{a-3}\right)\cdot\frac{6a-18}{36+12a+a^2}\right]^6}$$

41. Calcular el valor de la expresión

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$$

Si $2x=\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}$ y $a=1{,}568$.

42. Calcular x con dos cifras decimales correctamente aproximadas

$$4x^2-3x-2=0.$$

43. Calcular x con tres cifras significativas correctamente aproximadas

$$2x^2+5x+1=0.$$

44. Calcular la siguiente expresión

$$\frac{\sqrt[3]{27^2}\cdot 2^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2^3}}.$$

45. Desarrollar:

a) $(-0{,}2a^{-3}b-0{,}5ab^{-3})^2$ b) $(a^{\frac{n}{2}}-\frac{1}{2}a^{-n})^2$.

46. ¿Qué condición más simple que la propuesta deben cumplir a, b y c para que se verifique:

$$\left(a^{\frac{1}{2}}+bc^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(a^{\frac{1}{2}}-bc^{\frac{1}{2}}\right)^2=b^2c\left(2a+b^2c\right)?$$

47. Calcular el valor numérico de

$$x=\left(\frac{a-b}{2}\right)^{-1}+\frac{\sqrt{a+2\sqrt{b}}}{1+a+b}\cdot\sqrt{a-2\sqrt{b}},\ \text{si } a=7,\ b=12$$

48. Calcular

$$\left[a-\frac{(a+3\sqrt{ab})^2+(a-3\sqrt{ab})^2}{a+9b}\right]^2$$

49. Racionalizar el denominador de: $\dfrac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}-1}$

50. Calcular el valor numérico de:

$$y=1-\left(\frac{16}{16-x^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\quad\left[1+\left(\frac{\sqrt{16-x^2}}{-x}\right)^{-2}\right]^{\frac{3}{2}}$$

si $x=2\sqrt{2}$.

51. Calcular con cinco decimales el valor de:

$$y=(x^3+1)^2-(x^3-1)^2,\ \text{si } x=2^{-\frac{3}{2}}.$$

52. Calcular el valor de

$$\frac{a^3+b^3}{a^4-b^4}\quad\frac{a+b}{a^2-b^2}-\frac{1}{2}\left[\frac{a-b}{a^2+b^2}\quad\frac{1}{a-b}\right]$$

si $a=0{,}08$, $b=0{,}007$.

53. Se pide encontrar dos números racionales x e y tales que:

$$\sqrt{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}}=x+y\sqrt{3}.$$

54. Encontrar dos números racionales a y b tales que

$$\sqrt{29+12\sqrt{5}}=a+b\sqrt{5}.$$

55. Calcular la raíz cuadrada de los siguientes binomios:

a) $4+2\sqrt{3}$, b) $3+2\sqrt{2}$, c) $7-4\sqrt{3}$,

d) $5+2\sqrt{6}$. e) $7+2\sqrt{10}$, f) $21+8\sqrt{5}$.

56. Calcular la raíz cuadrada de:

$a^{-4}-2a^{-3}+5a^{-2}-4a^{-1}+4$.

57. Factorizar la expresión $a^4+a^2b^2+b^4$.

Aprovechando el resultado obtenido, factorizar también

a) $1+a^2+a^4$, b) x^2+xy+y^2.

58. Determinar los valores de *a* y *b* de modo que el polinomio $x^4-3x^3+ax^2+bx-1$ sea divisible por x^2-x+1.

59. Encontrar el valor de *m* si $2a+1$ es un factor de $8a^3+2a+m$.

60. Al dividir una expresión A por $4a^2-a+1$ el cuociente es $a-2$ y el resto es 4. Encontrar A y mostrar que A es exactamente divisible por $a-1$.

61. ¿Qué valor debe tener *u* en la expresión

$$(3t^3-2t+u) : (t-2)$$

para que la división no arroje resto?

62. ¿Qué valores deben tener *a* y *b* en el polinomio $x^4-8x^3+ax^2+bx-14$ para que sea divisible por x^2-5x-7?

63. En la expresión $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$, se hace $A=f-a$, $B=b-f$. ¿Qué relación resulta entre A, B y f?

64. Estudie las siguientes igualdades y pronuncie un juicio fundado relativo a cada una de ellas:

I) $5(a-2)+3(a+1)=7$.
II) $1+\frac{x}{3}+\frac{x}{2}+\frac{2x}{7}=2x-\frac{37}{42}x+9$.
III) $(b-5)(b+3)=(1+b)^2-4(b+4)$.

65. ¿Qué valor debe tener *a* en la ecuación:

$$\frac{a}{x-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{5}{x-2}$$ para que sea de primer grado?

¿Cuál es, en ese caso, el valor de x?

66. Demostrar que $x^4+1=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)$ y a partir de ella, encontrar las raíces de la ecuación $x^4+1=0$.

67. Resolver la ecuación:

$$\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}=\frac{ax+b}{px+q}$$

Decir qué sucede con el valor de x si a) $\frac{b}{c}=\frac{q}{r}$. b) $\frac{a}{c}=\frac{p}{r}$.

68. Resuelva la ecuación:

$$a^2x^2+ax+a=b^2x^2+bx+b$$

Discuta en el supuesto de que *a* y *b* son reales.

69. Factorize x^3-1 y x^3+1 y encuentre tres soluciones para cada una de las ecuaciones:

a) $x^3=1$, b) $x^3=-1$.

Compruebe las soluciones encontradas.

70. ¿Qué es una ecuación? ¿Qué se entiende por resolver una ecuación? Resuelva, e indique cuántas soluciones tiene:

$$\sqrt{x+10} \quad \frac{6}{\sqrt{x+10}}=5.$$

71. Si x' y x'' son las raíces de la ecuación:

$$x^2-(1+a)x+a^2=0,$$

forme una ecuación de segundo grado en z cuyas raíces cumplan las condiciones:

$$z'=\frac{x'}{x''}, \quad z''=\frac{x''}{x'}.$$

¿Para qué valor de *a*, una de las raíces de la ecuación en z será igual a $\frac{1}{4}$?

72. ¿Qué valores deben tener p y q en las ecuaciones:

a) $px^2+5x-6=0$, b) $7x^2-qx+3=0$

para que sus raíces sean iguales?

73. Calcular m y n de modo que las raíces de la ecuación $z^2+mz+n=0$ sean iguales a los respectivos duplos de las raíces de la ecuación $z^2-(a+b)z+ab=0$.

74. Se da la ecuación $5x^2-3x+c=0$.

Se pide establecer las condiciones que debe cumplir *c* en los casos siguientes:

a) Las dos raíces sean reales y positivas,
b) Una positiva y la otra negativa,
c) Una raíz cero,
d) Las dos raíces iguales,
e) Las dos raíces complejas.

75. Siendo x' y x'' las raíces de la ecuación $3x^2-18x+7=0$, se pide calcular, sin resolver la ecuación, la expresión:

$$5x'^2+4x'x''+5x''^2.$$

76. Formar la ecuación de segundo grado cuyas raíces son la suma y el producto de las raíces de la ecuación:

$$ax^2+bx+c=0.$$

77. ¿Cuál es la ecuación de coeficientes enteros cuyas raíces son $\alpha=2+\frac{1}{3}$, $\beta=2-\frac{1}{3}$?

¿Cuál es la ecuación de tercer grado cuyas raíces son las dos anteriores y $\gamma=\frac{1}{2}$?

78. Resolver la ecuación:

$$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(2^x-\sqrt{8^{x-1}}\right)=0.$$

79. Resolver la ecuación:

$$144x^{\frac{1}{5}}-25x^{\frac{3}{5}}+x=0.$$

(Ind. sacar factor común $x^{\frac{1}{5}}$).

80. Las cantidades A y B varían en forma directamente proporcional. Determinar el valor de A cuando B = 1,5 sabiendo que A = 10 para B = 7,8.

81. Si x es directamente proporcional a *a* y *b*, y es igual a 25 cuando a = 16 y b = 27, calcular el valor de x si a = 24 y b = 36.

82. *y* es directamente proporcional a *x*; x es inversamente proporcional al cuadrado de *z*. Se sabe que para z = 5 se tiene y = 3. Calcular *y* cuando z = 20.

83. Un ciclista recorre cierta distancia en 5 horas. Se pide determinar en cuántas horas recorre la misma distancia si aumenta su velocidad en 20% con respecto a la primera en que emplea 5 horas.

84. Si V es directamente proporcional a T e inversamente proporcional a P, y además, V = 42 cuando T = 273 y P = 76, calcular el valor de V si T = 650 y P = 95.

85. La energía cinética de un cuerpo en movimiento es directamente proporcional a su masa y al cuadrado de su velocidad. Comparar las energías cinéticas de dos cuerpos, uno de masa m que lleva velocidad v y otro de masa 3 m con velocidad $\frac{v}{3}$.

86. El peso de un cuerpo con respecto a un astro es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del cuerpo al centro del astro. Si un objeto sobre la superficie terrestre pesa una tonelada, ¿cuánto pesará si se aleja de la superficie en a) 1 radio terrestre, b) en 9 radios terrestres?

87. Si a : b = c : d, demostrar que:

$$(a+b) : \frac{a^2}{a+b} = (c+d) : \frac{c^2}{c+d}$$

88. Si a : b = c : d, demostrar que:

$$\frac{ab+cd}{ab-cd}=\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}.$$

89. Si x : y : z = a : b : c, demostrar que:

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2.$$

90. Si a : b = c : d = e : f, demostrar que:

$$(5a-7c+4e) : (5b-7d+4f)=c : d.$$

91. Si A : a = B : b = C : c, demostrar que:

$$\sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}=\sqrt{(A+B+C)\,(a+b+c)}\,.$$

92. Si a es directamente proporcional a b, demostrar que a^2+b^2 también es directamente proporcional a a^2-b^2.

93. Demostrar que $a : (b+d) = c^3 : (c^2d+d^3)$, si a, b, c y d forman una proporción continua.

94. Siendo b, media proporcional geométrica entre a y c, ¿es posible que b^4 sea igual a

$$(a^2-b^2+c^2) : (a^{-2}-b^{-2}+c^{-2})?$$

95. Dadas las proporciones $a : b = c : d$ y $x : y = u : v$, se pide deducir que

$$\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}+\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{c^3+d^3}{c^3-d^3}+\frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}.$$

96. Se sabe que $(a+b) : (b+c) : (c+a) = 1 : 5 : 7$. ¿En qué razón están a, b y c?

97. Determinar la razón $x : y$ sabiendo que

$$15(2x^2-y^2)=7xy.$$

98. Se sabe que

$$3x+y-2z=0$$
$$4x-y-3z=0.$$

Se pide determinar la razón en que están x, y, z.

99. Si
$$9x+y-8z=0$$
$$4x-8y+7z=0$$

Se pide a) la razón entre x, y, z; b) determinar sus valores si $x^3+y^3+z^3=1\ 728$.

100. Sabiendo que $a=1-b^{-1}$, $b=1+2c^{-1}$, demostrar que

$$(a+b+c) : (b^3+1)=b^{-1} : (b-1).$$

101. Demostrar que la expresión:

$$\frac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c+a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a+b}{(c-a)(c-b)}$$

vale 0 para cualquier valor de a, b y c.

102. Demostrar que la expresión

$$\frac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2}{(y-z)(y-x)}+\frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$$

es independiente de x, y y z.

103. Si $a+b+c=0$, demostrar que $a^3+b^3+c^3=3abc$.

104. Aprovechando la relación del ejercicio anterior, demostrar que $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3\,(x-y)\,(y-z)\,(z-x)$.

105. Si $a+b+c=2s$, demostrar que

a) $1-\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{2}{ab}\,(s-a)\,(s-b)$,

b) $1-\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{2}{ac}\,(s-a)\,(s-c)$,

c) $1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{2}{bc}\,(s-b)\,(s-c)$,

d) $(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2+s^2=a^2+b^2+c^2$.

106. Si $h_c \cdot c=a\cdot b$, y $a^2+b^2=c^2$, demostrar que

$$h_c^{-2}=a^{-2}+b^{-2}.$$

107. Demostrar que si $a+b+c=2s$ y $a^2=b^2+c^2$, la expresión $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ se reduce a $S=\frac{1}{2}bc$.

Resolver los sistemas:

108. $$\frac{x-c}{d} - \frac{d-y}{c} = 0$$
$$\frac{x+y-d}{c} + \frac{c-x-y}{d} = 0$$

109. $$ax + \frac{b}{y} = p$$
$$cx + \frac{d}{y} = q$$

110. $$\frac{2}{ax+bx} - \frac{1}{a-b}(1-3y) = 0.$$
$$\frac{2}{(a+b)x} + \frac{3y}{b-a} = \frac{1}{a+b}$$

111. $2(x+2y) = 3(y+2z) = 4(z+2x) = 12.$

112. $$\frac{xy}{5x+4y} = 6.$$
$$\frac{yz}{3y+2z} = 6.$$
$$\frac{xz}{3x+2z} = 8.$$

113. $$\frac{3x}{5} + \frac{5y}{3} = 2.$$
$$\frac{5}{3x} + \frac{3}{5y} = 2.$$

114. $$\frac{7}{x+y} + \frac{3}{x-z} = 2.$$
$$\frac{14}{x+y} - \frac{6}{y-z} = 1.$$
$$\frac{3}{x-z} + \frac{6}{y-z} = 2.$$

115. $$\frac{a}{a+c+x} + \frac{b}{b+c+y} = 1.$$
$$\frac{a^2}{a+c+x} + \frac{b^2}{b+c+y} = a+b.$$

116. $$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{0,3}{x} \cdot \frac{0,3}{y}$$
$$\frac{0,3}{x} - \frac{0,2}{y} = \frac{0,02}{x} \cdot \frac{0,1}{y}$$

117. $$2+ax-by = \frac{1}{ab}(a+b)^2$$
$$(a-b)x+(a+b)y = \frac{2}{ab}(a+b)(a-b)$$

118. $$5x-3y+z = 2$$
$$4x-2z+u = 2$$
$$3x-y+u = 8$$
$$6x+4y-z = 4.$$

119. $$2x+3y-4z+t = 0$$
$$5x-y+2z-t = 5$$
$$4x+2y-z+t = 9$$
$$x+4y+3z-t = 14.$$

120. $$2x+y = \frac{x+2z-v+30}{2} = \frac{u+v-1}{2} = \frac{5y+z+3}{3} =$$
$$= v-x = 12.$$

121. Formar una ecuación de segundo grado de raíces α y β de modo que

$$\alpha = \frac{m\beta - 1}{\beta - m}$$
$$\beta = \frac{m-\alpha}{\alpha+1}$$

122. $$x-y+z = 0$$
$$(a+b)x-(a+c)y+(b+c)z = 0$$
$$abx-acy+bcz = 1$$

123. ¿Qué valor debe tener *a* para que en el sistema

$$\left.\begin{aligned} ax+4y&=119 \\ 5x-ay&=\ 34 \end{aligned}\right|$$

se verifique que ambas incógnitas tengan el mismo valor? ¿Cuál es ese valor?

124. Mostrar que el sistema

$$\left.\begin{aligned} x+y&=15 \\ \sqrt{x-1}-\sqrt{y-1}&=\ 5 \end{aligned}\right|$$

no tiene solución.

125. Mostrar que las ecuaciones siguientes son compatibles (tienen las mismas soluciones).

$$\begin{aligned} 9y&=5x+65 \\ 5x+2y+10&=0 \\ x+3y&=11. \end{aligned}$$

126. ¿Qué condiciones deben cumplir a, b y c para que las tres ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{aligned} ax-by&=c' \\ cx-ay&=b \\ bx-cy&=a \end{aligned}$$

sean compatibles?

127. Determinar los valores que deben tener p y q en los dos sistemas de ecuaciones siguientes para que tengan las mismas soluciones:

$$\left.\begin{aligned} px+3y&=17 \\ qx+4y&=24 \end{aligned}\right| \qquad \left.\begin{aligned} 3x+py&=18 \\ 4x+qy&=25 \end{aligned}\right|$$

128. Resolver la ecuación:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=c \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}&=d \end{aligned}\right|$$

y encontrar valores para *c* y *d* de modo que *x* e *y* sean enteros.

129. $\left.\begin{aligned} x-3y&=1 \\ xy+x&=40 \end{aligned}\right|$

130. $\left.\begin{aligned} x+y+xy&=5 \\ (x+y)xy&=6 \end{aligned}\right|$

131. $\left.\begin{aligned} x-3y-4&=0 \\ \frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2&=0 \end{aligned}\right|$

132. $\left.\begin{aligned} xy+x+y&=169 \\ \sqrt{xy}-\sqrt{x+y}&=7 \end{aligned}\right|$

133. $\left.\begin{aligned} xy-x+y&=6 \\ x^2y-xy^2&=16 \end{aligned}\right|$

134. $\left.\begin{aligned} x^2y+xy^2&=42 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=\frac{7}{6} \end{aligned}\right|$

135. $\left.\begin{aligned} x+\frac{4}{y}&=1 \\ y+\frac{4}{x}&=25 \end{aligned}\right|$

136. $\left.\begin{aligned} x-\frac{2}{y}&=-\frac{p}{q} \\ y+\frac{2}{x}&=\frac{3q}{p} \end{aligned}\right|$

137. $\left.\begin{aligned} \sqrt{x}+\sqrt{y}&=\sqrt{m} \\ x+y&=m \end{aligned}\right|$

138. $\left.\begin{aligned} \frac{2}{x^2}-\frac{5}{xy}+\frac{2}{y^2}&=-\frac{1}{9} \\ \frac{2}{x}-\frac{1}{y}&=\frac{1}{6} \end{aligned}\right|$

139. $\left.\begin{aligned} 3x^2-xy+y^2&=115 \\ \frac{2x-3y}{x+y}+\frac{x+y}{2x-3y}&=3\tfrac{1}{3}. \end{aligned}\right|$

123. ¿Qué valor debe tener a para que en el sistema

$$\left.\begin{array}{r} ax+4y=119 \\ 5x-ay=\ \ 34 \end{array}\right|$$

se verifique que ambas incógnitas tengan el mismo valor? ¿Cuál es ese valor?

124. Mostrar que el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+y=15 \\ \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}=\ \ 5 \end{array}\right|$$

no tiene solución.

125. Mostrar que las ecuaciones siguientes son compatibles (tienen las mismas soluciones).

$$\begin{array}{r} 9y=5x+65 \\ 5x+2y+10=0 \\ x+3y=11. \end{array}$$

126. ¿Qué condiciones deben cumplir a, b y c para que las tres ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{array}{l} ax-by=c \\ cx-ay=b \\ bx-cy=a \end{array}$$

sean compatibles?

127. Determinar los valores que deben tener p y q en los dos sistemas de ecuaciones siguientes para que tengan las mismas soluciones:

$$\left.\begin{array}{r} px+3y=17 \\ qx+4y=24 \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{r} 3x+py=18 \\ 4x+qy=25 \end{array}\right|$$

128. Resolver la ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=c \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=d \end{array}\right|$$

y encontrar valores para c y d de modo que x e y sean enteros.

129. $\left.\begin{array}{r} x-3y=\ 1 \\ xy+x=40 \end{array}\right|$

130. $\left.\begin{array}{r} x+y+xy=5 \\ (x+y)xy=6 \end{array}\right|$

131. $\left.\begin{array}{r} x-3y-4=0 \\ \frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2=0 \end{array}\right|$

132. $\left.\begin{array}{r} xy+x+y=169 \\ \sqrt{xy}-\sqrt{x+y}=7 \end{array}\right|$

133. $\left.\begin{array}{r} xy-x+y=6 \\ x^2y-xy^2=16 \end{array}\right|$

134. $\left.\begin{array}{r} x^2y+xy^2=42 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{6} \end{array}\right|$

135. $\left.\begin{array}{r} x+\frac{4}{y}=1 \\ y+\frac{4}{x}=25 \end{array}\right|$

136. $\left.\begin{array}{r} x-\frac{2}{y}=-\frac{p}{q} \\ y+\frac{2}{x}=\frac{3q}{p} \end{array}\right|$

137. $\left.\begin{array}{r} \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{m} \\ x+y=m \end{array}\right|$

138. $\left.\begin{array}{r} \frac{2}{x^2}-\frac{5}{xy}+\frac{2}{y^2}=-\frac{1}{9} \\ \frac{2}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{6} \end{array}\right|$

139. $\left.\begin{array}{l} 3x^2-xy+y^2=115 \\ \frac{2x-3y}{x+y}+\frac{x+y}{2x-3y}=3\frac{1}{3}. \end{array}\right|$

140. Si $x+y=a$, y además $xy=b$, encontrar el valor de x^6+y^6.

141. $$\left.\begin{aligned} x^a y^b &= \left(\tfrac{4}{5}\right)^{a-b} \\ x^b y^a &= \left(\tfrac{5}{4}\right)^{a-b} \end{aligned}\right|$$

142. $$\left.\begin{aligned} x^3-y^3 &= 3\,582 \\ x-y &= 6 \end{aligned}\right|$$

143. $$\left.\begin{aligned} x^3+y^3 &= 189 \\ x+y &= 9 \end{aligned}\right|$$

144. $$\left.\begin{aligned} x^3+y^3 &= 91 \\ x^2-xy+y^2 &= 13 \end{aligned}\right|$$

145. $$\left.\begin{aligned} x^3-y^3 &= 2\,375 \\ x^2+xy+y^2 &= 475 \end{aligned}\right|$$

146. $$\left.\begin{aligned} x^3+y^3 &= 341 \\ x^2-xy+y^2 &= 31 \end{aligned}\right|$$

147. $$\left.\begin{aligned} x^3-y^3 &= 1\,468 \\ x^2+xy+y^2 &= 367 \end{aligned}\right|$$

148. $$\left.\begin{aligned} x^4+x^2y^2+y^4 &= 481 \\ x^2+xy+y^2 &= 37 \end{aligned}\right|$$

149. $$\left.\begin{aligned} x^4+x^2y^2+y^4 &= 741 \\ x^2-xy+y^2 &= 19 \end{aligned}\right|$$

150. $$\left.\begin{aligned} x^2+xy+y^2 &= 189 \\ x+\sqrt{xy}+y &= 21 \end{aligned}\right|$$

151. $$\left.\begin{aligned} x^2+xy+y^2 &= 1\,092 \\ x-\sqrt{xy}+y &= 26 \end{aligned}\right|$$

152. $$\left.\begin{aligned} 3x^2-xy-y^2 &= 92 \\ x^2+xy+3y^2 &= 60 \end{aligned}\right|$$

Ind. Por ser homogéneo el sistema, reemplácese $x=my$ y dividiendo las ecuaciones miembro a miembro se obtiene una ecuación con incógnita *m*.

153. $$\left.\begin{aligned} 7x^2+3xy+3y^2 &= 25 \\ x^2+5xy+y^2 &= -5 \end{aligned}\right|$$

154. $$\left.\begin{aligned} x^2-y^2 &= 9 \\ x+y &= \frac{18}{z} \\ xy &= 20 \end{aligned}\right|$$

155. $$\left.\begin{aligned} \frac{y}{x-z} = \frac{y+x}{z} &= \frac{x}{y} \\ x^2+y^2+z^2 &= a^2 \end{aligned}\right|$$

Ind. Determinar primero la razón entre x, y, z.

156. $$\left.\begin{aligned} x^2+y^2-z^2 &= 124 \\ x-y-z &= 4 \\ xy &= 50 \end{aligned}\right|$$

157. $$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 133 \\ x+y+z &= 19 \\ xy &= z^2 \end{aligned}\right|$$

158. $$\left.\begin{aligned} xy+xz+yz &= 47 \\ x+y+z &= 12 \\ x^2+y^2-z^2 &= 0 \end{aligned}\right|$$

159. $$\left.\begin{aligned} x^2yz &= 60 \\ xy^2z &= 90 \\ xyz^2 &= 150 \end{aligned}\right|$$

160. $$\left.\begin{aligned} x^2yzu &= 24 \\ xy^2zu &= 48 \\ xyz^2u &= 72 \\ xyzu^2 &= 96 \end{aligned}\right|$$

161. $$\left.\begin{aligned} xy+xz &= 20 \\ yz+xy &= 8 \\ xz+yz &= 18 \end{aligned}\right|$$

162. $$\left.\begin{aligned} x(x+y+z) &= 70 \\ y(x+y+z) &= 28 \\ z(x+y+z) &= 98 \end{aligned}\right|$$

163. $$\left.\begin{aligned} (x+y)(x+z) &= 70 \\ (y+z)(x+z) &= 35 \\ (x+y)(y+z) &= 50 \end{aligned}\right|$$

164. $$\left.\begin{aligned} xy+x+y &= 34 \\ xz+x+z &= 13 \\ yz+y+z &= 9 \end{aligned}\right|$$

CAPITULO XVII

Logaritmos.

90. Definición.—La igualdad $b^n = c$ da lugar a tres ecuaciones, conociendo dos de las tres cantidades que entran en ella.

1.ª Si c es la incógnita, que designamos por x, resulta:

$$x = b^n.$$

El cálculo del valor de x se obtiene ejecutando la operación llamada *elevación a potencia.*

2.ª Si *b* es la incógnita, resulta $x^n = c$, de donde se obtiene que:

$$x = \sqrt[n]{c}.$$

La operación que permite calcular el valor de x es la *extracción de raíz.*

3.ª Si *n* es la incógnita, resulta la ecuación $b^x = c$. Esta ecuación equivale al problema de calcular el exponente, conociendo la base y la

potencia. El valor del exponente x se expresa diciendo que es el logaritmo de c respecto a la base *b* y se escribe:

$$x = {}^b\log\ c$$

que se lee: *x igual al logaritmo de c, base b.*

Logaritmo de un número respecto a cierta base es el exponente a que se debe elevar la base para obtener el número.

La operación que se ejecuta para calcular el valor de un exponente (logaritmo) se llama *operación logarítmica.*

La elevación a potencia tiene, según lo expuesto, dos operaciones inversas, la extracción de raíz y la operación logarítmica, mientras que la multiplicación y la adición tienen una, porque estas operaciones son conmutativas y la elevación a potencia no lo es. 3^2 no es igual a 2^3. Excepción $4^2 = 2^4$.

De la definición de logaritmo se deriva la equivalencia de las dos ecuaciones siguientes:

$b^x = c$ y $x = {}^b\log\ c$ (Ejercicios 1 a 9).

91. Sistema de logaritmos.—El conjunto de los logaritmos de todos los números respecto de una misma base es un *sistema de logaritmos.*

En todo sistema de logaritmos cada número tiene un solo logaritmo, recíprocamente, a cada logaritmo corresponde un solo número. Por esto, la base de un sistema de logaritmos no puede ser la unidad, ni cero; tampoco conviene que sea un número negativo.

La base de un sistema de logaritmos debe ser, pues, un número positivo.

Los logaritmos de los números negativos con respecto a una base positiva son números imaginarios.

92. Propiedades de todo sistema de logaritmos.

I. Logaritmo de la unidad.
De la igualdad $b^0=1$ se deduce que:

$${}^{b}\log 1=0; \text{ luego}$$

El logaritmo de la unidad es igual a cero.

II. Logaritmo de la base del sistema.
De la igualdad $b^1=b$ se deduce que:

$${}^{b}\log b=1; \text{ luego}$$

El logaritmo de la base del sistema es igual a la unidad.

III. Logaritmo de una potencia de la base.
De la identidad $b^n=b^n$ se deduce que:

$${}^{b}\log b^n=n; \text{ luego}$$

El logaritmo de una potencia de la base es igual al exponente.

IV. Logaritmo de un producto.
Si designamos por x e y los logaritmos de los números a y c en un sistema de base b, se tiene:

$${}^{b}\log a=x$$
$${}^{b}\log c=y.$$

Estas ecuaciones equivalen a las siguientes:

$$a=b^x$$
$$c=b^y.$$

Multiplicando miembro a miembro estas igualdades resulta:

$$ac=b^{x+y}.$$

Según la definición de logaritmo, se tiene que:

$${}^{b}\log (ac)=x+y.$$

Sustituyendo x e y por sus valores, se encuentra que:

$${}^{b}\log (ac)={}^{b}\log a+{}^{b}\log c; \text{ luego}$$

*El logaritmo de un producto es igual a la **suma** de los logaritmos de los factores.*

Recíprocamente, la suma de los logaritmos de dos o más números es igual al logaritmo del producto de estos números.

V. Logaritmo de un cuociente.

De las igualdades:

$$^{b}\log\ a = x$$
$$^{b}\log\ c = y$$

resulta:

$$a = b^{x}$$
$$c = b^{y}$$

Dividiendo miembro a miembro estas igualdades, se obtiene:

$$\frac{a}{c} = b^{x-y}$$

De donde: $$^{b}\log \frac{a}{c} = x - y$$

y, por sustitución de x e y, resulta:

$$^{b}\log \frac{a}{c} = {}^{b}\log\ a - {}^{b}\log\ c; \text{ luego}$$

El logaritmo de un cuociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

Recíprocamente, la diferencia de los logaritmos de dos números es igual al logaritmo del cuociente de estos números.

VI. Logaritmo de una potencia.

Si $^{b}\log\ a = x$, se tiene que:

$$a = b^{x}$$

Elevando ambos miembros de esta igualdad a la potencia n, resulta $a^{n} = b^{nx}$ y, por lo tanto:

$$^{b}\log\ (a^{n}) = nx$$

y, por último, $$^{b}\log\ (a^{n}) = n\ .\ {}^{b}\log\ a; \text{ luego}$$

El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base.

Recíprocamente, el producto de un número por el logaritmo de otro es igual al logaritmo de este número elevado al primero.

VII. Logaritmo de una raíz.

Si hacemos: $^{b}\log\ a = x$

Se tiene: $a = b^{x}$.

Extrayendo raíz *n* de los dos miembros, se obtiene:

$$\sqrt[n]{a} = b^{\frac{x}{n}}.$$

De donde resulta, según la definición de logaritmo, que:

$$^{b}\log \sqrt[n]{a} = \frac{x}{n}$$

y, por sustitución de x, se encuentra:

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{^{b}\log\ a}{n}; \text{ luego}$$

El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo de la cantidad subradical dividido por el índice. (Ejercicios 10 y 11).

93. El sistema de Briggs.—En el cálculo ordinario se usa el sistema de los logaritmos *vulgares* o de *Briggs*, su autor, cuya base es 10. En los logaritmos de este sistema no se escribe la base; de manera que en vez de $^{10}log\ a$ se escribe solamente *log a*.

Aplicando a este sistema las propiedades anteriores, resulta el cuadro siguiente:

$$\begin{array}{lrl}
\log & 1 = 0, & \text{porque } 10^0 = 1 \\
\log & 10 = 1, & \text{porque } 10^1 = 10 \\
\log & 100 = 2, & \text{porque } 10^2 = 100 \\
\log & 1\,000 = 3, & \text{porque } 10^3 = 1\,000 \\
\dots & \dots & \dots \\
\log & \infty = \infty\ , & \text{porque } 10^\infty = \infty \\
\log & 0{,}1 = -1, & \text{porque } 10^{-1} = 0{,}1 \\
\log & 0{,}01 = -2, & \text{porque } 10^{-2} = 0{,}01 \\
\log & 0{,}001 = -3, & \text{porque } 10^{-3} = 0{,}001 \\
\dots & \dots & \dots \\
\log & 0 = -\infty, & \text{porque } 10^{-\infty} = 0.
\end{array}$$

De donde se deduce que:

a) *Los logaritmos de potencias de diez mayores que la unidad, son números enteros y positivos y los logaritmos de las potencias de diez menores que la unidad, son números enteros y negativos.*

En ambos casos el logaritmo es igual al exponente (III propiedad de un sistema de logaritmos). Si la potencia es mayor que 1, el logaritmo tiene tantas unidades como ceros tiene la potencia; si es menor que 1, el logaritmo tiene tantas unidades como cifras decimales tiene la potencia.

b) Los números que no son potencias de 10 están comprendidos entre dos potencias de este número; sus logaritmos estarán comprendidos entre los logaritmos de estas dos potencias límites. Si 264 es el número, resultan las relaciones que siguen:

$$100 < 264 < 1\,000$$
$$\log\ 100 < \log\ 264 < \log\ 1\,000$$
$$2 < \log\ 264 < 3$$

Como 264 es mayor que 100 y menor que 1 000, su logaritmo es mayor que 2 y menor que 3, es decir, se compone de 2 enteros y de una fracción.

En general, los logaritmos de los números que no son potencias de diez se componen de dos partes, una entera, llamada *característica* y otra parte fraccionaria escrita en forma decimal, llamada *mantisa*. La mantisa es generalmente un número irracional y, por esto, los logaritmos se indican con aproximación de cierto número de cifras decimales.

c) *Determinación de la característica y de la mantisa.*

La mantisa se encuentra en las tablas de logaritmos y se ha convenido que sea siempre positiva.

En cuanto a la característica hay que distinguir dos casos, uno para los números mayores que la unidad y otro para los menores que la unidad.

Del razonamiento de la letra b) de este párrafo se deduce que:

La característica del logaritmo de un número *mayor que la unidad tiene tantas unidades positivas como cifras enteras tenga el número menos una.*

Para el segundo caso tomemos como ejemplo el número 0,085, que es igual $\frac{85}{1\ 000}$.

Designando por M la mantisa, se puede anotar

$$\log \frac{85}{1\ 000} = \log 85 - \log 1\ 000$$

$$= 1 + M - 3$$
$$= -2 + M;\ \text{luego}$$

La característica de un número decimal menor que la unidad tiene tantas unidades negativas como ceros preceden a la primera cifra significativa.

El logaritmo de característica negativa se escribe de dos modos. La mantisa del logaritmo de 0,085 es 0,92942.

1.ª escritura $\log 0{,}085 = \bar{2}{,}92942$
2.ª escritura $\log 0{,}085 = 0{,}92942 - 2$

En el cálculo se prefiere la 2.ª escritura.

d) Consideremos los logaritmos de los números 584, 58,4 y 58 400.

$$\log 584 = 2 + \mathbf{M} \quad (\text{M} = \text{mantisa})$$

$$\log 58{,}4 = \log \frac{584}{10} = \log 584 - \log 10$$
$$= 2 + M - 1$$
$$= \mathbf{1 + M}$$

$$\log 58\ 400 = \log (584 \cdot 100)$$
$$= \log 584 + \log 100$$
$$= 2 + M + 2$$
$$= \mathbf{4 + M};\ \text{luego}$$

Los logaritmos de los números que constan de las mismas cifras significativas y colocadas en el mismo orden, tienen la misma mantisa.

94. Tablas de logaritmos y su uso.

Hay diferentes tablas de logaritmos que se diferencian en el número de cifras decimales de la mantisa y en la disposición de sus anotaciones. Aquí nos referimos a tablas de cinco cifras decimales, de las cuales insertamos una página, la que contiene las mantisas correspondientes a los logaritmos de los números desde 3 100 a 3 399.

Cada página de estas tablas de logaritmos se compone de tres columnas encabezadas respectivamente por las letras **N**, **L** y **P. P.** En la columna **N** están las tres primeras cifras significativas del número cuyo logaritmo se trata de buscar. La columna **L** contiene la mantisa, que se compone de dos partes, la primera de dos cifras, está al principio de la columna **L** y la segunda, de tres cifras, está en la columna encabezada por la cuarta cifra del número y en el mismo renglón en que están las tres primeras del número. La columna encabezada por **P. P.**

(partes proporcionales) contiene unas tablitas que se aprovechan para calcular la mantisa de logaritmos correspondientes a números de más de cuatro cifras.

El uso de una tabla de logaritmos se reduce a resolver los dos problemas que siguen:

1.° *Dado un número, determinar su logaritmo.*

2.° *Dado el logaritmo de un número, buscar el número.*

Problema 1.°—*Ejemplo 1.* Determinar el log 328,6, es decir, de un número de cuatro cifras significativas.

La característica es 2, porque el número tiene tres cifras enteras. La primera parte de la mantisa es 51. Para la segunda parte nos internamos en el renglón de 328 hasta llegar a la columna 6 y se encuentra 667.

$$\text{Log } 328{,}6 = 2{,}51667.$$

Para determinar el logaritmo de un número de cinco o más cifras significativas hay que tener presente que creciendo los números crecen también sus respectivos logaritmos; pero esto no establece que los logaritmos crecen proporcionalmente a los números respectivos o viceversa. Sin embargo, se acepta esta proporcionalidad en el cálculo, en virtud de la relación siguiente:

La diferencia entre los logaritmos de dos números es tanto menor cuanto más grande son los números y menor la diferencia entre ellos.

Dem. Sean N y $N+d$ dos números cuya diferencia es d.

Se tiene: $\log \dfrac{N+d}{N} = \log (N+d) - \log N$

o bien: $\log (N+d) - \log N = \log \left(1 + \dfrac{d}{N}\right)$.

Si d disminuye, la fracción $\dfrac{d}{N}$ disminuye y, por consiguiente, el binomio $1 + \dfrac{d}{N}$ y el $\log \left(1 + \dfrac{d}{N}\right)$. El primer miembro, que es la diferencia entre los logaritmos, también debe disminuir.

Ahora, si N aumenta, la fracción $\dfrac{d}{N}$ disminuye y por esto, disminuye el binomio $1 + \dfrac{d}{N}$ y su logaritmo; luego el primer miembro deberá disminuir también.

Ejemplo 2.—Determinar log 0,33147 (cinco cifras significativas).

La característica es —1. En la columna N se busca 331. La primera parte de la mantisa debería ser 51, pero como la segunda parte 035 tiene un asterisco (*) debe ser la siguiente, 52. La mantisa es, pues, 0,52035. Esta mantisa debe ser mayor que la que corresponde a log 3314 y menor que la de log 3315. Hay que hacer entonces una *interpolación*, mediante el raciocinio siguiente:

A un aumento de 10 unidades del orden que sigue del número (de 33140 a 33150) corresponde un aumento de 13 (cien milésimos) de la mantisa (de 035 a 048), a un aumento de una unidad del número corresponderá la décima parte de 13; es decir, 1,3 y a 7 unidades del número (de 33140) a 33147) corresponderá 1,3 . 7 = 9,1; luego.

$$\begin{aligned} \log 0{,}33147 &= 0{,}52035-1 \\ &\underline{+ \quad\quad 9\quad\ } \\ &= 0{,}52044-1 \end{aligned}$$

La interpolación se determina también aprovechando las tablitas auxiliares de la columna **P. P.** Se busca primero la diferencia tabular, es decir, la que hay entre la segunda parte de la mantisa encontrada y la que sigue, entre 035 y 048, en 13. En la tablita encabezada por 13 se busca en la columna de la izquierda la quinta cifra del número, es 7; al lado está el aumento del logaritmo que le corresponde, 9,1. Si la fracción que resulte es inferior a 0,5 se desprecia, pero si es 0,5 o mayor, se aumenta en una unidad a la parte entera de la interpolación.

Análogamente se procede para determinar el logaritmo de un número de más de cinco cifras.

Problema 2.°—*Ejemplo 1.* log x = 2,50893. Calcular x.

Se prescinde de la característica y se busca en las tablas la primera parte de la mantisa. Para buscar la segunda parte de la mantisa nos internamos en el renglón que principie con la centena más próxima a 8; en este caso en el renglón que principia con 786 hasta encontrar 893, que está

en la columna N del mismo renglón, es 322 y además se anota a la derecha al cifra 8, que encabeza la columna donde está la segunda parte de la mantisa. El número formado es 3228. Como la característica es 2, el número debe tener tres cifras enteras; luego x = 322,8.

Ejemplo 2. log x = 3,52065. Calcular x.

Se busca la primera parte de la mantisa, 52. Sigue 144 en el renglón de 52, mayor que 065. Se busca entonces en el renglón anterior la segunda parte de la mantisa que más se aproxime a 065, es 061. A esta mantisa corresponde el número 3316. Entre la mantisa elegida y la del logaritmo dado hay una diferencia de 4 y la diferencia tabular es 14. A un aumento de 14 en la mantisa hay un aumento de 1 unidad en el número, a un aumento de 4 en la mantisa habrá en el número un aumento de tantas unidades como 14 esté contenido en 4; 4 : 14 = 0,28.

Agregando el valor de la interpolación se forma el número 331628. Como la característica es 3, el número debe tener cuatro cifras enteras; luego x = 3316,28.

El cálculo se dispone así:

$$\begin{aligned} \log x &= 3{,}52065 \\ &\underline{\quad\quad\ \ 61} \\ &\quad\quad\ \ \ 4 : 14 = 0{,}28. \\ x &= 3316{,}28 \end{aligned}$$

N.	L.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
310	49	136	150	164	178	192	206	220	234	248	262
311		276	290	304	318	332	346	360	374	388	402
312		415	429	443	457	471	485	499	513	527	541
313		554	568	582	596	610	624	638	651	665	679
314		693	707	721	734	748	762	776	790	803	817
315		831	845	859	872	886	*900	914	927	941	955
316		969	982	996	*010	*024	*037	*051	*065	*079	*092
317	50	106	120	133	147	161	174	188	202	215	229
318		243	256	270	284	297	311	325	338	352	365
319		379	393	406	420	433	447	461	474	488	501
320		515	529	542	556	569	583	596	610	623	637
321		651	664	678	691	705	718	732	745	759	772
322		786	799	813	826	840	853	866	880	893	907
323		920	934	947	961	974	987	*001	*014	*028	*041
324	51	055	068	081	095	108	121	135	148	162	175
325		188	202	215	228	242	255	268	282	295	308
326		322	335	348	362	375	388	402	415	428	441
327		455	468	481	495	508	521	534	548	561	574
328		587	601	614	627	640	654	667	680	693	706
329		720	733	746	759	772	786	799	812	825	838
330		851	865	878	891	904	917	930	943	957	970
331		983	996	*009	*022	*035	*048	*061	*075	*088	*101
332	52	114	127	140	153	166	179	192	205	218	231
333		244	257	270	284	297	310	323	336	349	362
334		375	388	401	414	417	440	453	466	479	492
335		504	517	530	543	556	569	582	595	608	621
336		634	647	660	673	686	699	711	724	737	750
337		763	776	789	802	815	827	840	853	866	879
338		892	905	917	930	943	956	969	982	994	*007
339	53	020	033	046	058	071	084	097	110	122	135

	14	13	12
1	1.4	1.3	1.2
2	2.8	2.6	2.4
3	4.2	3.9	3.6
4	5.6	5.2	4.8
5	7.0	6.5	6.0
6	8.4	7.8	7.2
7	9.8	9.1	8.4
8	11.2	10.4	9.6
9	12.6	11.7	10.8

95. Cálculo logarítmico.—La aplicación de los logaritmos al cálculo numérico es de mucha importancia, porque reduce las operaciones a otras más sencillas: la multiplicación se reduce a adición, la división a sustracción, la elevación a potencia a multiplicación y la extracción de raíz a división. El cálculo de una expresión algebraica se hace por la aplicación de los teoremas sobre logaritmos hasta hallar el logaritmo de la expresión. El número correspondiente a este logaritmo es el valor de la expresión. Damos algunos ejemplos:

Ejemplo 1. $x = (47,659 \ . \ 0,09587)^3$

$$\log 47,659 = 1,67814$$
$$+\log 0,09587 = 0,98168-2$$
$$0,65982 \ . \ 3$$
$$\log x = 1,97946$$
$$x = 95,38$$

Ejemplo 2. $x = \sqrt[5]{\dfrac{2,4937}{78,358}}$

$$\log 2,4937 = 2,39685-2 \qquad (1)$$
$$-\log 78,358 = 1,89408$$
$$0,50277-2$$
$$\log x = (0,50277-2) : 5$$
$$\log x = (3,50277-5) : 5 \qquad (2)$$
$$= 0,70055-1$$
$$x = 0,5018$$

(1) Para evitar una mantisa negativa se sumó y se restó 2 al log 2,4937.

(2) Para que la característica sea número entero se agregó y restó 3 a la diferencia de logaritmos 0,50277—2. En general se suma y se resta tantas unidades cuantas sean necesarias para convertir la característica en múltiplo del divisor.

Ejemplo 3. $x = \dfrac{68,75\,\sqrt[3]{8,43}}{7,096 : 0,384^3}$	
$\log\ 68,75 = 1,83727$	$\log 7,096 = 0,85101$
$\frac{1}{3}\log\ 8,43 = 0,30861$	$3\log 0,384 = 0,75299—2$
Suma $= 2,14588$	Dif. $= 2,09802$
1.er término $= 139,919$	2.° térm. $= 125,320$

$x = 265,239.$

Ejercicios.

1. ¿Qué significa a) $^2\log 8 = 3$, b) $^3\log 81 = 4$, c) $^5\log 25 = 2$, d) $^{10}\log 1\,000 = 3$, e) $^m\log q = n$?

2. Expresar y escribir el valor del exponente en a) $2^x = 32$, b) $3^x = 27$, c) $a^n = b$.

3. Calcular los logaritmos de:

a) 2, 16, 64, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{128}$, base 2.

b) 3, 27, 729, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{243}$, base 3.

c) 5, 625, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{125}$, base 5.

4. Calcular $^7\log 343$, $^9\log 6561$, $^8\log 512$, $^4\log 1024$, $^3\log 2187$.

5. Calcular x en: a) $^4\log x = 3$, b) $^5\log x = 4$, c) $^3\log x = 5$, d) $^7\log x = 3$, $^6\log x = 1$.

6. ¿Respecto a qué base: a) el log 121 es 2, b) el $\log \frac{16}{81}$ es 4, c) el $\log \frac{1}{64}$ es — 3?

7. Calcular x en: a) $^x\log 196 = 2$, b) $^x\log 4096 = 6$, c) $^x\log 2401 = 4$, d) $^x\log 243 = —5$, e) $^x\log 5\frac{1}{16} = —4$.

8. Calcular $^{16}\log 8$, $^{27}\log 3$, $^{256}\log 64$, $^8\log 32$, $^9\log 27$, $^{81}\log 243$.

$(8 = \sqrt[4]{16^3} = 16^{\frac{3}{4}}$; luego $^{16}\log 8 = \frac{3}{4})$

9. Calcular $^{\frac{2}{3}}\log \frac{32}{243}$, $^{1\frac{1}{3}}\log 3\frac{13}{81}$, $^{2\frac{1}{2}}\log 97\frac{21}{32}$.

10. Desarrollar: a) $\log (abc)$, $\log \frac{ab}{c}$, $\log \frac{a^3}{\sqrt{c}}$

b) $\log \frac{a}{bc}$, $\log \sqrt[3]{2abc}$, $\log \frac{3ab^2\sqrt{c}}{4xy}$

c) $\log (ab)^3$, $\log \sqrt{ab}$, $\log (5a^2\sqrt[5]{7b^2})$

d) $\log \frac{2ab^5}{3c\sqrt{d^3}}$, $\log \frac{7a\sqrt{b}}{3c^2y^3}$, $\log \sqrt{\frac{5a^2c}{a^2—b^2}}$

11. Indicar el logaritmo de la expresión a que corresponde cada desarrollo siguiente:

a) $\log a + \log b$; $\log a - \log b$
b) $\log a + \log b - \log c$
c) $\log a - \log b - \log c$
d) $2 \log b$, $\frac{1}{3} \log a$, $\frac{3}{4} \log c$
e) $2 \log a - \frac{1}{2} \log b + \log c$
f) $\frac{1}{2} \log x - \frac{1}{3} \log y + \frac{1}{4} \log z$
g) $\log a - 4 \log b + \frac{1}{5}(\log c + 3 \log x - 2 \log d)$
h) $5 \log a + \frac{2}{3} \log b + \frac{1}{3} \log c - \frac{1}{2} \log x - \frac{3}{2} \log y + \frac{1}{2} \log z$.

12. ¿Entre qué números enteros están comprendidos los logaritmos de 8, 45, 80, 150, 250, 1300, 1530?

13. ¿Entre qué números enteros están comprendidos los logaritmos de 78, 546, 1420, 10500, si la base es 10?

14. Indicar la característica de los logaritmos vulgares de los números 68, 316, 43,7, 9,85, 695, 2614, 24008, 0,89, 0,065, 0,0075, 0,0004.

15. Dado $\log 486{,}75 = 2{,}68731$, calcular:

a) log 4867,5	b) log 48675	c) log 486750
d) log 4867500	e) log 48,675	f) log 4,8675
g) log 0,48675	h) log 0,048675	i) log 0,0048675.

16. Calcular ${}^{2}\log\ (64 \,.\, 128)$; ${}^{3}\log\ (243 : 729)$.

17. Dados $\log 2 = 0{,}30103$, $\log 3 = 0{,}47712$, $\log 7 = 0{,}84510$; $\log 9 = 0{,}95424$, $\log 11 = 1{,}04139$; $\log 13 = 1{,}11394$, calcular: a) log 20, log 200, log 6, log 21, log 18.

b) log 8, log 9, log 49, log 64, log 81.

c) $\log 4\frac{1}{2}$, $\log 3\frac{2}{3}$, $\log 5\frac{1}{2}$.

d) $\log \frac{11}{13}$, $\log \frac{3}{7}$, $\log \frac{2}{3}$.

e) $\log 3\frac{2}{3} + \log \frac{3}{13}$, $\log \frac{6}{7} - \log \frac{2}{7}$.

f) $\log \frac{1}{2} - \log \frac{2}{3} - \log \frac{3}{7} - \log \frac{7}{9} - \log \frac{9}{11} + \log 2\frac{3}{4}$.

18. Determinar, aprovechando la página de tabla logarítmica insertada en el texto, los logaritmos de:

a)	31	b)	3191	c)	0,3296
	3,2		324,2		0,03237
	0,33		33,33		0,003168
	3,18		3,384		0,0003319
	326		3275		0,3389
d)	3197,5	e)	3,3074	f)	3216,3
	328,56		315,77		31,796
	3,3284		32,518		0,33475
	32,167		3134,5		0,03186
	31498		33689		3,19578

19. Determinar, mediante las tablas, los logaritmos de:

a)	b)	c)
72,048	8015,76	0,28907
295,79	4,90835	5,07964
0,5368	0,06958	75,8067
19467	69,7259	918,176

20. Buscar los números correspondientes a los logaritmos que siguen, aprovechando la página de logaritmos del texto:

a)	b)	c)
3,49638	2,49768	4,50967
2,50745	1,52847	0,49518—1
1,51693	0,51583	0,51553—2
0.52956	3,53089	0,50071—3

21. Buscar los números correspondientes a los siguientes logaritmos:

a)	b)	c)
1,04892	4,65034	0,81026
2,38075	2,09183	0,19583—1
3,90036	3,38279	0,46815—2
0,53714	1,18275	0,07016

22. Calcular por logaritmos las expresiones siguientes:

a) $289{,}12 \cdot 53{,}623$ b) $2{,}3568 \cdot 0{,}0235$

c) $2{,}3768 : 0{,}87534$ d) $0{,}34569 : 7{,}1351$

e) $1{,}357245^{10}$, $0{,}877058^{9}$

f) $\sqrt[5]{3{,}1866}$, $\sqrt[7]{0{,}066472}$.

23. Calcular por logaritmos:

a) $\dfrac{7{,}8564 \cdot 3{,}7653}{98{,}706}$, b) $\dfrac{98{,}3907}{0{,}76085 \cdot 58{,}9673}$

c) $\dfrac{5{,}84 \cdot 7{,}93 \cdot 0{,}831 \cdot 17{,}83}{940 \cdot 0{,}00728}$

d) $\dfrac{49876 \cdot 0{,}037542 \cdot 68{,}7075}{7{,}81649 \cdot 578{,}95 \cdot 28{,}4299}$.

24. Calcular por logaritmos:

a) $\dfrac{0{,}56^{2} \cdot 1{,}345^{9}}{(146 \cdot 0{,}148)^{5}}$, b) $\dfrac{45{,}37284^{10}}{\sqrt[3]{0{,}0005462379}}$.

c) $1{,}7314 \cdot \sqrt{\dfrac{\sqrt{0{,}01562}}{\sqrt{2}}}$, d) $\dfrac{9{,}387 \cdot \sqrt{0{,}09307}}{0{,}568 \cdot \sqrt{0{,}07038}}$

25. Calcular por logaritmos:

a) El valor de x en la proporción $2{,}7195 : 0{,}48736 = 87{,}932 : x$.

b) La media proporcional geométrica entre 3,8573 y 0,48926.

c) La expresión

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)},$$

para $a = 5{,}6861$, $b = 4{,}9243$, $c = 2{,}843$.

d) La expresión $\sqrt{\frac{(c+b-a)\ (c+a-b)}{ab}}$, para $a=51{,}693$; $b=61{,}693$; $c=68{,}6868$.

26. Calcular por logaritmos:

a) $\sqrt{\frac{4{,}308\ +\ \sqrt{7{,}6805}}{0{,}4748}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{8{,}23017}{116{,}322}} + \sqrt[3]{\frac{187{,}64}{930{,}527}}$

c) $\sqrt[10]{2{,}1663 - \sqrt[11]{492{,}1}}$.

Ecuaciones exponenciales.

1. $3^{2x}=6561$. **2.** $3^{2x-4}=729$.

3. $\sqrt[x]{7776}=6$. **4.** $\sqrt[x]{5^3}+\sqrt[x]{5^6}=30$

5. $\sqrt[x]{128}+\sqrt[2x]{128}=20$ **6.** $5^{x^2-3x}=625$.

7. $\log 3x=\log 72$. **8.** $\log x+\log 2=\log 60-\log 5$

9. $\log\ (x+9)-\log\ x=\log\ (x+1)$.

10. $\log\ (x+2)+\log\ (x+3)=\log\ 2$.

11. $\frac{\log\ (x+7)}{2}=\log\ (x+5)$.

12. $9^{x^2-7x+12}=1$. **13.** $7^{x^2-5x+9}=343$.

14. $8^{x^2-9x-24}=4096$. **15.** $6^{x^4-18x^2+86}=7776$.

16. $4^{x+1}+\frac{64}{4x}=257$. **17.** $3\ .\ 2^{x+3}=192\ .\ 3^{x-3}$.

18. $5\ .\ 3^{2x-7}\ .\ 3^x=3456$

19. $x^x-x^{-x}=3(1+x^{-x})$.

20. $3^x+3^{x-1}+3^{x-2}+3^{x-3}+3^{x-4}=363$.

21. $\log\ (7x-9)^2+\log\ (3x-4)^2=2$.

22. $\frac{1}{5-\log x}+\frac{1}{1+\log x}=1$.

23. $\log\sqrt{7x+5}+\log\sqrt{2x+7}=1+\log 4{,}5$.

24. $\frac{\log\ (35-x^3)}{\log\ (5-x)}=3$.

CAPITULO XVIII

Progresión aritmética.

96. Definición.—Si al número 6 agregamos sucesivamente 4, resulta la serie (1)

6, 10, 14, 18, 22, 26, 30....

que se llama *progresión aritmética.*

Es también progresión aritmética la serie

56, 48, 40, 32, 24, 16....

puesto que cada término se forma agregando —8 al precedente.

Luego, *progresión aritmética es una serie de términos tales que la diferencia entre dos términos consecutivos es constante.*

Esta diferencia constante entre dos términos consecutivos de una progresión aritmética y que se llama también *razón*, se determina restando un término del siguiente. Puede ser *positiva* o *negativa.*

Cuando la razón de la progresión es positiva, los términos van aumentando y, por esto, la

(1) Serie es una sucesión de cantidades que se forma con arreglo a una ley determinada. Las cantidades son los términos de la serie.

progresión es *creciente*. Si la razón es negativa, los términos van disminuyendo; la progresión es *decreciente.*

La primera progresión es creciente; la razón es 4; la segunda progresión es decreciente, la razón es —8.

97. Propiedad de cada término de una progresión aritmética.

Según la definición, cada término de una progresión aritmética se puede obtener agregando la razón al término precedente o restando la razón del siguiente.

Sean t, t' y t'' tres términos consecutivos de una progresión aritmética, cuya razón designaremos por d. Según lo dicho, se tiene:

$$t' = t + d$$
$$t' = t'' - d$$

Sumando ordenadamente estas dos igualdades, resulta:

$$2t' = t + t''$$

de donde: $$t' = \frac{t+t''}{2}.$$

Luego, *cada término de una progresión aritmética es el promedio*, o medio aritmético, *entre el término que le antecede y el que le sigue.*

98. Término general, último término, de una progresión aritmética.

Designando por *a* el primer término, por *d* la diferencia y por *n* el número de términos, la representación general de la progresión aritmética será:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d, \ldots\ a+(n-1)d.$$

En efecto, y en consecuencia, de la definición, el *segundo* término es igual al *primero* más la diferencia; el *tercero* es igual al segundo más la diferencia, o al *primero más dos veces la diferencia;* el *cuarto* es igual al tercero más la diferencia, o al *primero más tres veces la diferencia;* el *quinto* es igual al *primero más cuatro veces la diferencia,* y así sucesivamente; luego, en general, un término cualquiera de una progresión aritmética es igual al primer término más tantas veces la diferencia como términos hay antes de él. De modo que la expresión general del término que ocupa el lugar *n* es igual a $a+(n-1)d$. Designando por *u* este término, se tiene la fórmula:

$$u=a+(n-1)d.$$

Luego, *el término general,* es decir, cada término, *de una progresión aritmética, es igual al primero más el producto de la razon por el número de términos que le preceden.*

Esta relación permite calcular una de las cuatro cantidades, *u, a, n* y *d* dadas las otras tres.

De la fórmula general resulta:

$$a=u-(n-1)d$$

$$d=\frac{u-a}{n-1}$$

$$n=\frac{u-a}{d}+1$$

99. Suma de dos términos equidistantes de los extremos.

Sean t el término que tiene p términos antes de él y t′ el que tiene p términos después. Es evidente que:

$$t\ =a+pd$$

y

$$t'\ =u-pd$$

Sumando ordenadamente estas dos igualdades, se encuentra:

$$t'+t=a+u.$$

Luego, *la suma de dos términos equidistantes de los extremos de una progresión aritmética es igual a la suma de los términos extremos.*

Corolario. Si el número de términos de la progresión es impar, el término medio es igual a la semisuma de los extremos.

100. Suma de los términos de una progresión aritmética.

Sea S la suma, cuyo valor se expresa primero en función del primer término y la diferencia, y segundo en función del último término y la diferencia. Se anota entonces:

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+\ldots+u$$
$$S=u+(u-d)+(u-2d)+(u-3d)+\ldots+a$$

Sumando ordenadamente estas dos igualdades, se tiene:

$2S=(a+u)+(a+u)+(a+u)+(a+u)+\ldots+(a+u)$, o sea: $2S=(a+u)n$

$$S=\frac{(a+u)n}{2}.$$

Luego, *la suma de los términos de una progresión aritmética es igual a la mitad del producto de la suma de los términos extremos por el número de términos.*

Introduciendo en esta fórmula el valor de *u*, se tiene:

$$S=\frac{[a+a+(n-1)d]n}{2}$$

$$=\frac{2an+(n-1)dn}{2}$$

$$=\frac{n[2a+(n-1)d]}{2}$$

Ejercicios.

1. Formar la progresión aritmética, dados:

a) $a=7$, $d=5$, $n=9$
b) $a=74$, $d=-12$, $n=8$
c) $u=100$, $d=15$, $n=10$
d) $a=8$, $d=2\frac{3}{4}$, $n=7$

2. Determinar la razón en las progresiones siguientes:

a) 13, 20, 27, 34,...
b) 68, 59, 50, 41,...
c) $5\frac{1}{2}$, $8\frac{1}{4}$, 11, $12\frac{3}{4}$,...

3. En una progresión aritmética, el séptimo término es 35 y el noveno, 83. Calcular el octavo término y la razón.

4. En una progresión aritmética, el quinto término es $24\frac{5}{8}$ y el séptimo es $90\frac{3}{4}$. Calcular el sexto término y la razón.

5. Expresar el valor general del 4.°, del 6.°, del 10.°, del 15.°, del 20.°, del 35.°, del 40.° términos de una progresión aritmética.

6. Calcular en las progresiones siguientes el término que se indica:

a) 9, 14, 19,...; calcular el 16.° término.
b) 15, 24, 33,...; calcular el 12.° término.
c) 8, 20, 32,...; calcular el 21.° y el 55.° términos.

d) $6\frac{3}{4}$, 9, $11\frac{1}{4}$,...; calcular el 15.° término.

e) —12,4, —15,9, —19,2,...; calcular el 25.° término.

f) 95, 84, 73,...; calcular el 32.° término.

7. Dados: a) $a=12$, $d=7$, $n=15$; calcular u.
b) $u=153$, $d=11$, $n=14$; calcular a.
c) $a=23$, $u=131$, $n=13$; calcular d.
d) $a=15$, $u=145$, $d=10$; calcular n.

8. La suma de los extremos de una progresión aritmética de 12 términos es 148 y el 5.° término es 56. Calcular el 8.° término.

9. $a+u=190$, $n=11$. Calcular el 6.° término.

10. Calcular la suma de los términos de una progresión aritmética dados:

a) $a=20$, $u=185$, $n=12$; b) $a=340$, $u=200$, $n=15$;
c) $a=15$, $n=14$, $d=9$; d) $a=113$, $u=17$, $d=-6$;
e) $a=160$, $n=14$, $d=-12$; f) $u=120$, $n=16$, $d=6$;
g) $n=7$, 4.° térm. $=36$; h) $n=14$, 5.° t. $=50$, 10.° $=94$.

11. Calcular el primer término de la progresión dados:

a) $u=124$, $n=24$, $d=5$; b) $u=12$, $n=15$, $d=-7$.
c) $S=1029$, $u=132$, $n=14$;
d) $S=1343$, $n=17$, $d=8$;
e) $S=150$, $u=55$, $d=5$;

f) $S=520$, $n=13$, 6.° t. $=35$ y 8.° $=45$.

12. Calcular la diferencia, dados:
a) $a=24$, $u=120$, $n=17$; b) $a=99$, $n=10$, $u=9$;
c) $S=880$, $a=5$, $n=11$; d) $S=1035$, $a=10$, $u=80$;
e) $S=2133$, $u=34$, $n=18$.

13. Calcular el número de términos, dados:
a) $a=13$, $d=10$, $u=133$; b) $a=14$, $u=120$, $S=1005$;
c) $a=20$, $d=5$, $S=1020$; d) $d=4$, $u=50$, $S=330$
e) $S=504$ y el término equidistante de los extremos es 56;
f) $S=1692$, 7.° t. $=69$ y 12.° t. $=119$; e s términos equidistan de los extremos.

14. Interpolar (intercalar) entre 23 y 67 tres términos de modo que resulte una progresión aritmética.

15. Idem 4 términos entre 24 y 84.

16. Idem 6 términos entre 13 y 125.

17. El término medio de una progresión aritmética de 9 términos es 27. ¿Cuál es la suma de los 9 términos?

18. El término medio de una progresión aritmética es 51 y la suma es 867. Calcular n.

19. El quinto término de una progresión aritmética de 16 términos es 44 y el 12.° es 100. Calcular S.

20. Dados: $S=1395$, $d=11$ y $n=15$; calcular a.

21. Dados: $S=988$, $a=10$, $n=13$; calcular d.

22. Dados: $S=1040$, $a=20$, $d=6$; calcular n.

23. Dados: $S=896$, $n=14$, $u-a=104$; calcular a, u y d.

24. Dados: $S=336$, $a=50$, $d=-4$; calcular n y u.

25. Dados: $a=7$, $n=18$, $d=6$; calcular S y u.

26. Dados: $S = 960$, $a = 120$, $n = 16$; **calcular** d y u.

27. Dados: $S = 2120$. $d = 8$, $n = 20$; **calcular** a y u.

28. Dados: $d = 2\frac{1}{2}$, $n = 25$, $u = 60$; **calcular** a y S.

29. Dados: $a = 15$, $u = 135$, $S = 975$; **calcular** d y n.

30. Determinar una fórmula para calcular la suma de los n primeros números pares y otra para la suma de los n primeros números impares. Aplicaciones.

31. El sexto término de una progresión aritmética es 66 y el 13.° es 136. Formar la progresión.

32. En una progresión aritmética, la suma del 4.° término con el 12.° es 116 y la del 9.° término con el 15.° es 172. Calcular a y d.

33. El 14.° menos el 5.° término de una progresión aritmética es 54 y el 11.° es 79. Formar la progresión.

34. La suma de 11 términos de una progresión aritmética es 363 y el 8.° término menos el 3.° es 25. Calcular a y d.

35. El producto del 5.° término por el 2.° es 364 y la diferencia de estos términos es 15. Formar la progresión si a es positivo.

36. En una progresión aritmética de 10 términos el producto de los dos términos que ocupan los lugares medios es 195 y la suma del 3.° con el 9.° es 30. Calcular a y d.

37. Se canceló una deuda de modo que el primer pago fue de E° 50 y cada pago siguiente aumentaba en E° 15. El último pago fue de E° 230. ¿Cuál era la deuda y en cuántos pagos se canceló?

38. Repartir E° 1 000 entre 16 personas de modo que cada persona reciba E° 5 más que la anterior. ¿Cuánto reciben la primera y la última?

39. En una carrera se fijaron los premios de modo que cada jinete recibiera E° 45 menos que el anterior. El que ganó la carrera recibió E° 360 y los demás, en suma, E° 990. ¿Cuántos eran los jinetes y cuánto recibió el último?

40. Once personas reciben en suma E° 880 y sus partes forman una progresión aritmética creciente. ¿Cuánto recibe la primera y la última, si la diferencia de sus partes es E° 30?

41. Un cuerpo, al caer, recorre 4,9 m en el primer segundo y en cada segundo la distancia recorrida aumenta en 9,8 m a la recorrida en el segundo anterior. ¿Cuál es la distancia recorrida en el décimo segundo y desde qué altura cayó el cuerpo?

42. Hallar tres números en progresión aritmética, cuya suma es 24 y su producto 440.

Observación.—Si una progresión aritmética tiene un número impar de términos y los datos del problema no son los elementos de la progresión, conviene designar como incógnita el término del medio y la razón puede ser otra incógnita.

En el problema anterior la anotación de los números pedidos será:

$$x-y,\ x,\ x+y$$

Si el número de términos es par, se designan los dos términos medios por $x-y$ y $x+y$ y la razón por $2y$.

43. La suma de tres números en progresión aritmética es 48 y la de sus cuadrados es 800. Hallar los números.

44. Calcular los ángulos de un triángulo rectángulo, sabiendo que forman una progresión aritmética.

45. Calcular los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que forman una progresión aritmética, cuya razón es 21.

46. La suma de tres números en progresión aritmética es 18 y la de sus valores recíprocos es $\frac{11}{18}$. Hallar los números.

47. La suma de cuatro números en progresión aritmética es 24 y la de sus cuadrados es 164. Hallar los números.

48. La suma de los cuatro términos medios de una progresión aritmética de 12 términos es 74 y el producto de los términos extremos es 70. ¿Cuál es la progresión?

49. En una progresión aritmética, la suma de los cuadrados del 4.° y del 12.° térm. es 1170 y la suma del 7.° con el 15.° térm. es 60. Calcular el primer término y la diferencia.

50. La suma de tres números en progresión aritmética es 180 y la diferencia entre el tercer término y el primero es 30. Hallar los números.

51. La suma de tres números en progresión aritmética es 45 y el producto del 1.° por el 3.° es 216. Hallar los números.

52. La suma de los 8 términos de una progresión aritmética es 40 y el producto de la suma de los cinco primeros términos por la suma de los últimos es 300. Calcular el primer término y la diferencia.

CAPITULO XIX.

Progresión geométrica.

101. Definición.—Si el número 5 se multiplica sucesivamente por 3, resulta la serie:

$$5,\ 15,\ 45,\ 135,\ 405,\ 1215$$

que se llama *progresión geométrica.*

Es también progresión geométrica la serie:

$$3072,\ 768,\ 192,\ 48,\ 12, \ldots$$

puesto que cada término se obtiene multiplicando el anterior por el mismo número, por $\frac{1}{4}$.

En toda progresión geométrica, el cuociente entre dos términos consecutivos es constante.

Luego, *progresión geométrica es una serie de términos tales que el cuociente entre dos términos consecutivos es constante.*

Este cuociente constante entre dos términos consecutivos de una progresión geométrica, llamado *razón* de la progresión, se calcula dividiendo un término por el anterior. Puede ser mayor o menor que la unidad; en el primer caso la progresión es *creciente* y en el segundo *decreciente.* La primera progresión de la definición es creciente, cuya razón es 3, y la segunda es decreciente, cuya razón es $\frac{1}{4}$.

102. Valor de cada término de una progresión geométrica.

Según la definición, cada término de una progresión geométrica es igual al producto del anterior por la razón o al cuociente del que sigue por la razón.

Sean a, b, c tres términos consecutivos de una progresión geométrica, cuya razón designaremos por q.

Se tiene entonces:

$$b = aq$$

y

$$b = \frac{c}{q}$$

Multiplicando ordenadamente estas igualdades, resulta:

$$b^2 = ac$$

De donde:

$$b = \sqrt{ac}$$

Luego, *cada término de una progresión geométrica es la media proporcional geométrica entre el término anterior y el siguiente.*

103. Término general. Para la representación general de una progresión geométrica designaremos por a el primer término, por q la razón y por n el número de términos.

Como consecuencia inmediata de la definición el *segundo* término es igual al producto del primero por la razón; el *tercero*, al producto del primer término por la segunda potencia de la razón; el *cuarto*, al producto del primer término por la tercera potencia de la razón, y así sucesivamente. En general, un término cualquiera de una progresión geométrica es igual al primer término multiplicado por una potencia de la razón cuyo exponente es el número de términos que hay antes de él. La expresión general de la progresión es entonces:

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ aq^4, \ldots,\ aq^{n-1}$$

El término que ocupa el lugar n y que se designa por u, es:

$$u = aq^{n-1}$$

De esta relación fundamental resultan las siguientes fórmulas, que sirven para calcular la cantidad despejada, dadas las otras tres:

$$a = \frac{u}{q^{n-1}}$$

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$$

$$n = \frac{\log u - \log a}{\log q} + 1.$$

104. Producto de dos términos equidistantes de los extremos. Sea la progresión:

4, 12, 36, 108, 324, 972

De donde:

$$36 = 4 \cdot 3^2$$
$$108 = \frac{972}{3^2}$$
$$\overline{36 \cdot 108 = 4 \cdot 972}$$

En general, sean j y k dos términos de modo que antes de j hay n términos y después de k otros n términos. Entonces se tiene:

$$j = aq^n$$

$$k = \frac{u}{q^n}$$
$$\overline{jk = au}$$

Luego, *el producto de los términos equidistantes de los extremos de una progresión geométrica es igual al producto de los extremos.*

Corolario. Si el número de términos de la progresión es impar, el *término del medio es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos.*
En efecto, sea t un término precedido de n términos y seguido de otros n términos.

Resulta: $t = aq^n$

$$t = \frac{u}{q^n}$$
$$\overline{t^2 = au}$$

$$t = \sqrt{au}$$

105. Suma de los términos.

Sea S la suma de los términos, de modo que:

$$S = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1}$$

Multiplicando los dos miembros por q, se tiene:

$$Sq = aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1} + aq^n$$

Restando la primera igualdad de la segunda, resulta:

$$S\,q - S = a\,q^n - a$$
$$S(q-1) = a(q^n - 1)$$
$$S = \frac{a(q^n-1)}{q-1}$$

Esta fórmula es aplicable para una progresión creciente. Si la progresión es decreciente, $q-1$ es negativo. Amplificando el segundo miembro por -1, la fórmula se transforma en la siguiente:

$$S = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

Estas dos fórmulas se pueden transformar introduciendo el valor de u, como sigue:

$$u = aq^{n-1}$$
$$uq = aq^{n}$$

Sustituyendo aq^n en $S = \frac{aq^n - a}{q-1}$, resulta:

$$S = \frac{uq - a}{q-1}, \text{ para la progresión creciente.}$$

$$S = \frac{a - uq}{1-q}, \text{ para la progresión decreciente.}$$

106. Producto de los términos.

Sea *P* el producto de los términos, de modo que:

$$P = a \cdot aq \cdot aq^2 \cdot aq^3 \ldots\ aq^{n-2} \cdot aq^{n-1}$$

Expresando la progresión en función de *u* y formando el producto, se tiene:

$$P = u \cdot \frac{u}{q} \cdot \frac{u}{q^2} \cdot \frac{u}{q^3} \ldots \frac{u}{q^{n-2}} \cdot \frac{u}{q^{n-1}}$$

Multiplicando miembro a miembro las dos igualdades, resulta:

$$P^2 = au \cdot au \cdot au \cdot au \cdot au \ldots\ au.$$

o sea: $P^2 = (au)^n$

De donde: $P = \sqrt{(au)^n}$

Luego, *el producto de los términos de una progresión geométrica es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos elevado al número de términos.*

107. Serie geométrica.

Se llama *serie geométrica* una progresión geométrica decreciente de infinito número de términos. La suma de los términos de una serie geométrica tiene un valor finito.

De la fórmula $S = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ resulta:

$$S = \frac{a - aq^n}{1-q}$$

Como *q* es una fracción propia, sus potencias disminuyen a medida que aumenta el exponente; de modo que aq^n se hace tanto menor cuanto mayor sea *n* y entonces el valor de S se aproxima a

$$\frac{a}{1-q}.$$

Cuando n sea infinitamente grande ($n=\infty$), aq^n se anula, vale cero, y entonces:

$$S = \frac{a}{1-q}$$

Luego, *la suma de los términos de una serie geométrica es igual al primer término partido por uno menos la razón.*

Ejemplo: Calcular la suma de la serie:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$$

Aplicando la fórmula, resulta:

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 1\tfrac{1}{2}$$

El valor de S se aproxima a $1\frac{1}{2}$ cuanto más términos se consideran, sin llegar jamás a él. El límite de la suma de los términos de la serie es $1\frac{1}{2}$.

Las series geométricas tienen aplicación en la demostración de que las fracciones decimales periódicas y semiperiódicas son números racionales.

Ejemplo: 1. $x=0{,}666\ldots$ es una fracción periódica, cuyo período es 6. Se puede escribir:

$$x=\frac{6}{10}+\frac{6}{100}+\frac{6}{1000}+\ldots$$

Resulta una serie geométrica, cuya razón es: $\frac{1}{10}$; luego

$$x=\frac{\frac{6}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3},$$

lo que demuestra que la fracción 0,666... es un número racional. Se deduce, además, la regla siguiente:

Una fracción decimal periódica es igual a una fracción común cuyo numerador es el período y cuyo denominador es un número compuesto de tantos nueves como cifras tenga el período.

2. $y=0{,}583\ldots$ (3), es una fracción decimal semiperiódica, el anteperíodo es 58 y el período es 3. Se puede escribir:

$$y=\frac{58}{100}+\frac{3}{100\,.\,10}+\frac{3}{100\,.\,10^2}+\ldots$$

A partir del segundo término del segundo miembro, es una serie geométrica cuya razón es: $\frac{1}{10}$; luego

$$y=\frac{58}{100}+\frac{\frac{3}{1\,000}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{58}{100}+\frac{3}{900}$$

$$= \frac{58 \cdot 9+3}{900} = \frac{58(10-1)+3}{900}$$

$$= \frac{583-58}{900} = \frac{525}{900}$$

El resultado nos dice que:

Una fracción decimal semiperiódica es igual a una fracción común, cuyo numerador es la diferencia entre el número formado por el anteperíodo seguido del período y el anteperíodo, y cuyo denominador es un número compuesto de tantos nueves como cifras tenga el período, seguidos de tantos ceros como cifras tenga el anteperíodo.

Ejercicios.

1. Formar la progresión geométrica, dados:

a) $a=4$, $q=3$, $n=5$; b) $a=9$, $q=2$, $n=6$;
c) $a=3$, $q=-5$, $n=4$; d) $a=100$, $q=\frac{1}{2}$, $n=5$.

2. Calcular la razón en las progresiones siguientes:

a) 7, 21, 63, 189,...
b) 512, 128, 32, 8,...
c) a^2b, a^4b^2, a^6b^3, a^8b^4,...
d) $a\sqrt{6}$, $3a^2\sqrt{2}$, $3a^3\sqrt{6}$, $9a^4\sqrt{2}$, ...

e) $\frac{8}{9}x^2y$, $\frac{2}{3}x^3$, $\frac{x^4}{2y}$, $\frac{3x^5}{8y^2}$...

3. Formar 6 términos de una progresión geométrica, dados:

a) $a=2$, $q=5$; b) $a=7$, $q=4$;
c) $a=2\,916$, $q=\frac{1}{3}$; d) $a=256$, $q=\frac{3}{4}$.

4. El producto del 4.° término de una progresión geométrica por el 6.° es 5 184. Calcular el 5.° término.

5. El tercer término de una progresión geométrica es 15 y el 5.° es 735. ¿Cuál es el 4.° término?

6. Expresar el valor general del 4.°, del 7.°, del 12.°, del 16.° y del 20.° términos de una progresión geométrica.

7. Calcular el 8.° y el 12.° térm. de la progresión 4, 8, 16...

8. Calcular el 6.° y el 10.° térm. en la progresión 3, 9, 27...

9. Calcular el 7.° y el 15.° térm. en la progresión 128, 64, 32...

10. Calcular el 8.° y el 13.° térm. en la progresión 3, —6, 12...

11. Dados: a) $a=8$, $q=4$, $n=7$, calcular u;
b) $u=1\,458$, $q=3$, $n=6$, calcular a;
c) $u=2\,500$, $a=4$, $n=5$, calcular q;
d) $a=5$, $q=4$, $u=20\,480$, calcular n.

12. Intercalar entre 7 y 567 tres términos, de modo que resulte una progresión geométrica.

13. Idem entre 10 y 77 760, cuatro medios geométricos.

14. $a=5$, $q=3$, $u=1\,215$; calcular n.

15. $a=9$, $u=36\,864$, $n=7$; calcular el 4.° término

16. El producto del primer término por el octavo es 218 700 y el tercer término es 90. Calcular el sexto término.

17. El octavo término es 384, el primero es 3 y el sexto es 96. Formar la progresión.

18. El primer término es 7 y el tercero es 112. Formar la progresión.

19. El primer término es 6 y el 4.° 162; calcular el séptimo término.

20. Calcular S, dados:

a) $a=2$, $q=3$, $n=6$; b) $a=7$, $q=4$, $n=5$;
c) $a=8$, $q=5$, $n=4$; d) $a=1\,215$, $q=\frac{1}{3}$, $n=6$;
e) $a=4$, $q=6$, $u=31\,104$;
f) $a=3$, $q=-5$, $u=9\,375$;
g) $a=243$, $q=\frac{2}{3}$, $n=6$,
h) $a=4\,096$, $u=81$, $q=\frac{2}{3}$.

21. $a=8$, $q=5$, $S=31\,248$; calcular u y n.
22. $q=2$, $n=5$, $S=93$; calcular a y u.
23. $a=128$, $q=\frac{1}{2}$, $n=7$; calcular u y S.
24. $q=3$, $u=13\,122$, $S=19\,680$; calcular a y n.
25. $q=2\frac{1}{2}$, $n=4$, $S=406$; calcular a y u.
26. $q=-2$, $n=8$, $u=-2\,560$; calcular a y S.
27. $u=1\,792$, $a=7$, $n=5$; calcular q y S.
28. $a=8$, $u=1\,944$, $S=2\,912$; calcular q y n.
29. $a=161$, $q=3$, $n=4$; calcular u y S.
30. $q=1\frac{1}{2}$, $n=6$, $S=665$; calcular a y u.
31. $u=15\,309$, $q=3$, $n=8$; calcular a y S.
32. $a=4\,347$, $u=161$, $n=4$; calcular S y q.

33. Formar una progresión geométrica de 5 términos de modo que la razón sea igual a $\frac{1}{3}$ del primer término y que la suma de los dos primeros términos sea 18.

34. Si durante 20 años un hombre, por su mal ejemplo o intencionalmente, induce a un solo hombre por año a abandonar la senda de la virtud y cada uno de estos infelices seduce por su parte a un individuo por año, ¿cuál es el número de extraviados, después de 20 años?

35. Un jugador apuesta en el primer juego \$ 5, y como perdiera, duplicó la apuesta en el segundo juego con el mismo mal resultado. Continuó duplicando la apuesta hasta que en el octavo juego apostó todo el dinero que le quedaba. ¿Cuánto apostó en el último juego y cuánto perdió?

36. Buscar cuatro números positivos, en progresión geométrica, de modo que el cuarto número menos el tercero sea igual a 144 y el segundo menos el primero sea igual a 16.

37. En una progresión geométrica de 4 términos la suma del 1.° con el 3.^er^ térm. es 40 y la del 2.° con el 4.° es 20. Hallar los números.

38. La suma de tres números en progresión geométrica es 186 y la diferencia de los términos extremos es 144. Hallar los números.

39. Buscar tres números positivos en progresión geométrica, de modo que su suma sea 21 y que el mayor tenga 3 unidades más que la suma de los otros dos.

40. Calcular los ángulos de un cuadrilátero, sabiendo que forman una progresión geométrica y que el mayor es igual a 9 veces el segundo.

41. Formar una progresión geométrica de tres términos cuyo producto sea 1 728 y la suma 52.

42. El volumen de un paralelepípedo rectangular es 3 375 cm^3. Calcular las aristas, sabiendo que están en progresión geométrica y que su suma es 65 cm.

43. En una progresión geométrica de 7 términos, la suma de los 3 primeros términos es 13 y la suma de los tres últimos es 1 053. Formar la progresión.

44. Cuatro personas se reparten cierta suma de dinero, de modo que cada persona reciba 4 veces lo que reciba la anterior. Si la tercera persona recibió E° 320, ¿cuál fue la suma repartida?

45. Un terreno rectangular de 750 m de ancho tiene un perímetro de 3 900 m y produce una utilidad de E° 625 por hectárea, el primer año de cultivo, y en cada año siguiente rinde los $\frac{4}{5}$ de la utilidad anterior.

¿Cuánto ha producido este terreno durante cinco años de cultivo?

46. Si en una progresión geométrica de tres términos se resta 8 del segundo término, resulta una progresión aritmética, y si en ésta se resta 64 del tercer término, resulta nuevamente una progresión geométrica. Formar la progresión.

47. Una progresión aritmética y otra geométrica de tres términos cada una, tienen el mismo primer término 4 y también el segundo término es el mismo, pero desconocido. El tercer término de la progresión geométrica es $\frac{25}{16}$ del tercer término de la progresión aritmética. Establecer las progresiones.

48. Calcular las sumas en las series geométricas siguientes:

a) $12,\ 4,\ 1\frac{1}{3}, \ldots$

b) $24,\ 18,\ 13\frac{1}{2}, \ldots$

c) $18,\ -6,\ 2,\ -\frac{2}{3}, \ldots$

d) $-20,\ 12,\ -7\frac{1}{5}, \ldots$

e) $\frac{3}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{9}, \ldots$

f) $\frac{8}{9},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{8}, \ldots$

g) $5\frac{1}{3},\ 2,\ \frac{3}{4},\ \frac{9}{32}, \ldots$

49. Calcular las sumas siguientes:

a) $2\frac{22}{25} + 2\frac{2}{5} + 2 + 1\frac{2}{3} +, \ldots$

b) $1\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{2}{9} + \frac{8}{81} +, \ldots$

c) $3\frac{1}{5} - 2 + 1\frac{1}{4} - \frac{25}{32} \pm \ldots$

d) $-3\frac{5}{9} + 2\frac{2}{3} - 2 + 1\frac{1}{2} - 1\frac{1}{8} \pm \ldots$

50. Calcular las sumas de las series combinadas siguientes:

a) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \ldots$

b) $\frac{1}{6} + \frac{5}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \frac{5}{6^4} + \ldots$

c) $\frac{1}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{5}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{3}{4^5} + \frac{5}{4^6} +, \ldots$

d) $\frac{2}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{6}{5^3} + \frac{2}{5^4} + \frac{4}{5^5} + \frac{6}{5^6} +, \ldots$

51. Determinar las fracciones comunes generatrices de las siguientes fracciones decimales periódicas y semiperiódicas:

a) 0,11 . . . (1) ; 0,555 . . . (5)
b) 0,4545 . . . (45) ; 0,1818 . . . (18)
c) 0,296 . . . (296) ; 0,273 . . . (273)
d) 0,833 . . . (3) ; 0,533 . . . (3)
e) 0,583 . . . (3) ; 0,388 . . . (8)
f) 0,409 . . . (09) ; 0,76565 . . . (65)

52. La suma de los infinitos términos de una serie geométrica es 9 y la suma de los dos, primeros términos es 8. Formar la serie.

53. Si en un cuadrado de lado a se unen los puntos medios de los lados contiguos, se forma otro cuadrado. Repitiendo la construcción en el segundo cuadrado, resulta un tercer cuadrado, y así indefinidamente. Calcular la suma de los lados y las sumas de las áreas de los infinitos cuadrados.

54. En un cuadrado de lado a se ha inscrito otro cuadrado cuyos vértices dividen los lados del primer cuadrado en la razón de 1 : 2. En el segundo cuadrado se inscribe un tercer cuadrado que divide los lados del anterior en la misma razón y así indefinidamente. Sumar los lados y las áreas de todos estos cuadrados.

55. Dado un triángulo equilátero, se construye otro triángulo equilátero que tenga como lado la altura del triángulo dado; en seguida se construye un tercer triángulo equilátero con la altura del segundo triángulo, como lado; después un cuarto triángulo equilátero con la altura del tercero como lado, y así indefinidamente. ¿Cuál es la suma de las áreas de todos los triángulos, incluso el dado?

56. En un círculo de radio r se inscribe un cuadrado; en este cuadrado se inscribe un círculo; en este círculo se inscribe otro cuadrado, y así indefinidamente. ¿Cuál es la suma de las áreas de los cuadrados y la suma de los círculos?

CAPITULO XX

Interés compuesto

108. Definición.—Los intereses que un capital produce, después de un tiempo determinado, se pueden retirar, quedando constante el capital o agregarse al capital para ganar a su vez interés en el período de tiempo siguiente. En el primer caso se trata de *interés simple* y en el segundo de *interés compuesto.*

Los intervalos de tiempo en que se *capitalizan* los intereses se llaman *períodos de capitalización*, que son generalmente *anuales* o *semestrales.*

El crecimiento de un capital con sus intereses, durante cierto tiempo, es mayor cuando está colocado a interés compuesto que cuando está a interés simple, como puede notarse en el ejemplo siguiente.

Sea el capital de E° 5 400 colocado al 4% durante un año seis meses.

$$\textit{Interés simple} = \text{E}^\circ\,\frac{4 \cdot 5\,400 \cdot 3}{100 \cdot 2} = \text{E}^\circ\ 324.$$

Agregando este interés al capital, resulta E° **5 724.**

Interés compuesto, con capitalización semestral. El tanto por ciento semestral es 2.

El 2% de E° 5 400 es igual a E° 108. En el primer semestre el capital se convierte en E° 5 508.

El 2% de E° 5 508 es igual a E° 110,16. En el segundo semestre el capital se convierte en E° 5 618,16.

El 2% de E° 5 618,16 es igual a E° 112,36. En el tercer semestre el capital se convierte en **E° 5 730,52.**

La diferencia a favor del interés compuesto es E° 6,52.

109. Fórmula de interés compuesto. a) *Períodos completos de capitalización.* En la determinación de la fórmula de interés compuesto hay que distinguir las siguientes cantidades y sus designaciones: el *capital primitivo*, c, *el tanto por ciento*, *t*, o más bien el *tanto por uno*, i, es decir, $\frac{t}{100}$ $=$i, *el número de períodos*, n y el *capital definitivo*, C.

Se designa por q a un peso más sus intereses en un período, esto es, q = 1 + i y se llama *factor de interés compuesto* o factor de capitalización.

En el primer período el capital primitivo es c.

Un escudo gana al fin del período *r* escudos y se convierte en 1 + i escudos = q. Los *c* escudos se convertirán en **cq** escudos.

El capital primitivo en el segundo período es cq. Como un escudo se convierte al fin de un período en q escudos, los cq escudos se convertirán en cq · q = **cq²**.

El capital primitivo en el tercer período es cq^2. Un escudo se convierte al fin del período en q escudos, cq^2 se convertirán en $cq^2 \cdot q = cq^3$.

Continuando el mismo razonamiento, el capital definitivo al fin del cuarto período será cq^4; al fin del quinto período será cq^5 y al fin del período de rango n será cq^n; de modo que se tiene la fórmula:

$$C = cq^n.$$

Como en esta igualdad entran cuatro cantidades, conociendo tres de ellas se puede calcular la cuarta. Fácilmente se deduce que:

$$c = \frac{C}{q^n}$$

$$q = \sqrt[n]{\frac{C}{c}}$$

$$n = \frac{\log C - \log c}{\log q}.$$

b) *Períodos incompletos de capitalización.* Puede suceder que un capital se coloque a interés *t* días, por ejemplo, antes de principiar un período y se retire *t'* días después del fin de un período, lo que da lugar a dos fracciones de período que designaremos por k y k' de modo que $k = \frac{t}{180}$ y $k' = \frac{t'}{180}$, para capitalizaciones semestrales.

Es evidente que si *un* escudo gana i en un período, en la fracción de período k, ganará ki y se convertirá al fin del período en $1+ki$. El capital c se convertirá en $c(1+ki)$. Este capital ganará interés compuesto durante los **n** períodos completos que siguen y se convertirá, según la fórmula de períodos completos en $c(1+ki)q^n$.

Por último, este capital ganará interés en la segunda fracción de período k' y se convertirá definitivamente en:

$$C = cq^n(1+ki)(1+k'i)$$

La aplicación de esta fórmula permite calcular las cantidades que figuran en ella, con excepción del tanto por ciento, porque en este caso se tendría que resolver una ecuación de grado $n+1$ con respecto a la incógnita i.

Problemas fundamentales. **1.** ¿En qué suma se convierten E° 5 000 colocados al 5% con capitalización semestral de los intereses en 5 años?

Aplicamos la fórmula $C = cq^n$.

$$\begin{array}{lll} c = 5\,000, \; q = 1{,}025, \; n = 10. & & \\ \quad \log c & = 3{,}69897 & \log q = 0{,}01072 \\ n \log q & = 0{,}10720 & 10.\ \log q = 0{,}10720 \\ \hline \quad \log C & = 3{,}80617 & \\ \quad\quad C & = 6399{,}85 & \end{array}$$

2. ¿Qué capital se ha convertido en E° 7 895 con sus intereses compuestos al 6% en 4 años 6 meses?

De $C = cq^n$ se tiene:

$$\begin{array}{ll} \log c = \log C - n \log q. & \\ C = 7895, \quad q = 1{,}03, & n = 9. \\ \log C = 3{,}89735 & \log q = 0{,}01284 \\ n \log q = 0{,}11556 & 9 \log q = 0{,}11556 \\ \hline \log c = 3{,}78179 & \\ c = 6050{,}42 & \end{array}$$

3. ¿A qué tanto por ciento debe colocarse un capital de E° 15 800 para que, con sus intereses capitalizados semestralmente, se convierta en E° 26 470,58 después de 7 años 6 meses?

De $C = cq^n$ se deduce:

$$\log q = \frac{\log C - \log c}{n}$$

$$\begin{array}{lll} \text{Se sabe que } c & = 15800, & C = 26470{,}58, \; n = 15 \\ \log C & = 4{,}42276 & \\ \log c & = 4{,}19866 & \\ \text{Dif.} & = 0{,}22410; & 0{,}22410 : 15 = 0{,}01494 \\ \log q & = 0{,}01494 & \\ q & = 1{,}035 & \\ i & = 0{,}035 & \end{array}$$

El tanto por ciento semestral es de 3,5 y el anual el 7%.

4. ¿En qué tiempo un capital de E° 6 500, colocado al 4% con capitalización semestral de los intereses, se convierte en E° 8 081,80?

De $C = cq^n$ se deduce:

$$n = \frac{\log C - \log c}{\log q}$$

$$
\begin{array}{llr}
C = 8081{,}80 \quad c = 6500, & & q = 1{,}02 \\
\log C = 3{,}90751 & & \log q = 0{,}0086 \\
\log c = 3{,}81291 & & \\
\hline
\text{Dif.} = 0{,}09460 & &
\end{array}
$$

$$0{,}09460 : 0{,}0086 = 11$$

El tiempo es 5 años 6 meses.

Como una aplicación de la fórmula de períodos incompletos resolveremos el problema siguiente:

El 18 de Abril de un año se colocan E° 6 840 a interés compuesto del 8%, con capitalizaciones semestrales de los intereses. ¿En qué tiempo se podrán retirar E° 9 500?

Para conseguir el procedimiento usual, se calculan primero los intereses simples de E° 6 840 al 8% en 72 días, que es el tiempo transcurrido desde el 18 de Abril al 1.° de Julio. Estos intereses son E° 109,44.

El 1.° de Julio el capital primitivo E° 6 840 se ha convertido con sus intereses en 72 días en E° 6 949,44. Aplicamos ahora la fórmula para n conociendo:

$$
\begin{array}{llr}
C = 9500, \quad c = 6949{,}44, & & q = 1{,}04 \\
\log C = 3{,}97772 & & \log q = 0{,}01703 \\
\log c = 3{,}84195 & & \\
\hline
0{,}13577 : 0{,}01703 = 7{,}973 & &
\end{array}
$$

Es decir $n' = 7$ semestres y 0,973 de semestre. Esta fracción de semestre equivale a 180 ds . 0,973 = 176 días.

Hay que calcular ahora el capital definitivo formado con E° 6 949,44 al 8% de interés compuesto durante 7 semestres.

$$
\begin{array}{rl}
\log c & = 3{,}84195 \\
7\log q & = 0{,}11921 \\
\hline
\log C & = 3{,}96116 \\
C & = 9144{,}50
\end{array}
$$

La cuestión queda ahora reducida a calcular el tiempo en que E° 9 144,50 producen al 8%, E° 355,50 que faltan para completar los E° 9 500. Este cálculo aritmético da como resultado 175 días.

Los E° 9 500 se pueden retirar después de 7 semestres 175 días, contados desde el 1.° de Julio del año en que se hizo el depósito.

La diferencia de un día con el cálculo logarítmico proviene de la diferencia entre el interés simple y el compuesto.

Ejercicios. (1)

1. ¿En qué sumas se convierten los capitales guientes colocados a interés compuesto con pitalizaciones semestrales en las condiciones notadas:

a) E° 7 895 al 4% en 6 años?
b) E° 13 680 al 5% en 8 años?
c) E° 15 795 al 5½% en 9 años 6 meses?
d) E° 24 560,80 al 7½% en 8 años 6 meses?

(1) Empléense Tablas de 6 decimales.

2. Si la Caja de Ahorros abona 5% de interés anual y capitaliza los intereses anualmente, ¿qué capital se retirará colocando a) E° 5 800, después de 20 años? b) E° 4 500, después de 25 años?

3. ¿Qué capital definitivo forman los capitales siguientes colocados a interés compuesto con capitalizaciones semestrales y en las condiciones que se anotan:

a) E° 6 720 al 7% en 5 años 4 meses?
b) E° 9 460 al 6½% en 6 años 3 meses 18 días?
c) E° 8 347,50 al 5½% en 7 años 5 meses 10 días?

4. El 10 de Abril de 1960, una persona colocó en un banco E° 1 550 al 7%, con capitalizaciones semestrales. ¿Qué suma retirará el 12 de Septiembre de 1971?

5. Un padre de familia colocó en la Caja de Ahorros $ 9 500, el 6 de Marzo de 1898, fecha del nacimiento de su primera hija. Retira el dinero con sus intereses al 5% capitalizados al fin de cada año, el 6 de Octubre de 1919, día en que su hija contrae matrimonio. ¿Qué suma recibió la hija?

6. ¿Qué suma debe colocarse a interés compuesto con capitalizaciones semestrales para obtener, en las condiciones que se expresan, los siguientes capitales:

a) E° 5 000 al 6% en 8 años?
b) E° 8 650 al 5% en 9 años 6 meses?
c) E° 10 000 al 7% en 10 años 6 meses?
d) E° 12 000 al 8% en 7 años 4 meses?
e) E° 15 000 al 6½% en 8 años 2 meses 20 días?

7. Si los intereses se capitalizan semestralmente, calcular el tanto por ciento en que:

a) E° 8 560 se convierten en E° 12 947,68 durante 7 años.
b) E° 9 345 se convierten en E° 13 872,78 durante 8 años.
c) E° 12 695 se convierten en E° 16 275,49 durante 10 años.

8. Calcular el tiempo en que, con capitalización semestral de los intereses:

a) E° 5 380 se convierten, al 5%, en E° 8 600,78.
b) E° 6 185 se convierten, al 6%, en E° 8 516.
c) E° 7 490,75 se convierten, al 8%, en E° 11 992,83.
d) E° 8 950 se convierten en E° 14 900 al 7%.
e) E° 10 000 se convierten en E° 15 000 al 6%.

9. ¿En qué fecha, con capitalización semestral de los intereses:

a) E° 4 200, colocados al 30 de Marzo de 1960 al 8%, se convertirán en E° 6 000?
b) E° 3 750 colocados el 24 de Abril de 1961 al 7% se convertirán en E° 5 850?
c) E° 5 140 colocados el 10 de Junio de 1960, al 6%, se convertirán en E° 7 580?

10. ¿En qué tiempo se duplica, triplica, etc., un capital al 5, 6, 7, 8% anual con capitalización semestral y anual de los intereses?

CAPITULO XXI

Anualidades.

110. Definición.—Se llama *anualidad* la suma de dinero que se entrega periódicamente, durante un tiempo determinado, con el fin de formar un capital o de pagar una deuda. Cualquiera que sea el intervalo de tiempo (año, semestre, trimestre, mes) la cantidad fija que se entrega en cada período conserva su nombre de anualidad

Cuando las anualidades tienen por objeto formar un capital, se llaman *imposiciones*, y cuando se destinan a extinguir una deuda, se llaman *amortizaciones*.

111. Imposiciones. Designamos por a la anualidad, por r el tanto por uno en el período, por $1+r=q$ el factor de interés compuesto, por n el número de períodos y por A el capital formado al fin de los n períodos.

Suponiendo que cada anualidad sea entregada al principiar el período, la primera anualidad gana interés compuesto durante n períodos y formará, por esto, un capital de aq^n; la segunda anualidad, que gana intereses durante $n-1$ períodos, formará un capital de aq^{n-1}; la tercera anualidad, que permanece ganando intereses durante $n-2$ períodos se convertirá en aq^{n-2};

la penúltima anualidad, que está en interés durante dos periodos se convertirá en aq^2 y la última en aq.

La suma de los capitales parciales formados por las anualidades da el capital definitivo, de modo que:

$$A = aq^n + aq^{n-1} + aq^{n-2} + \dots + aq^2 + aq$$

El segundo miembro de esta igualdad es la suma de los términos de una progresión geométrica, cuyo primer término es aq, la razón es q, el último término es aq^n y n es el número de términos. Resulta entonces que:

$$A = \frac{aq\ (q^n-1)}{q-1}$$

Esta fórmula sirve para determinar el capital A, la anualidad a y el número de períodos. En la aplicación de la fórmula para determinar el valor de A o de a, conviene calcular previamente el factor q^n-1. Con este objeto se hace:

$$x = q^n - 1$$

de donde: $x+1 = q^n$

luego: $\log(x+1) = n \log q.$

Conociendo $x+1$ se determina x y la fórmula se convierte en:

$$A = \frac{aqx}{q-1}$$

Para las facilidades del ahorro se puede *fraccionar la anualidad*, es decir, en vez de pagar la anualidad al principio de cada semestre, se pagan seis mensualidades, una al principio de cada mes. Designamos por x esta mensualidad. El razonamiento de interés compuesto nos dice que la primera mensualidad se convierte al fin del semestre en $x(1+\frac{6}{6}r)$; la segunda mensualidad se convierte en $x(1+\frac{5}{6}r)$; la tercera en $x(1+\frac{4}{6}r)$; la última en $x(1+\frac{1}{6}r)$.

La suma de estas cantidades es igual al capital formado por una anualidad durante un semestre, de modo que:

$$a(1+r)=x(1+\frac{6}{6}r)+x(1+\frac{5}{6}r)+\ldots+x(1+\frac{1}{6}r)$$

$$=6x+\frac{xr}{6}(6+5+\ldots+2+1)$$

$$=6x+\frac{xr}{6}\cdot 21$$

$$=\frac{x(12+7r)}{2}$$

De donde $$x=\frac{2a(1+r)}{12+7r}$$

Si hacemos $a=150$ y $r=0{,}03$, resulta:

$$x=\frac{300\ .\ 10{,}3}{12{,}21}=25{,}30$$

112. Amortizaciones. En las amortizaciones la anualidad se resta de un capital (deuda) que gana interés compuesto. Designemos por *c* esta deuda y por *a* la anualidad que se entrega para servir esta deuda. Las letras *q* y *n* tienen el significado ya conocido. Consideremos primero el caso de entregar las anualidades al término de cada período (plazos vencidos).

Al fin del primer período el capital *c* se ha convertido con sus intereses en *cq*. El pago de la anualidad reduce este capital a $cq-a$, que es el capital que ha de ganar interés en el segundo período, convirtiéndose, al fin de él, en $(cq-a)q = cq^2-aq$. Restando la anualidad *a*, el capital que reportará intereses compuestos en el tercer período será cq^2-aq-a, convirtiéndose al fin del período en $(cq^2-aq-a)\,q=cq^3-aq^2-aq$.

El capital que gana interés en el cuarto período es cq^3-aq^2-aq-a y se convierte al término del período en $cq^4-aq^3-aq^2-aq$.

Al fin del quinto período la deuda estará reducida, previo pago de la anualidad, a $cq^5-aq^4-aq^3-aq^2-aq-a$.

En el último período, de rango n, al fin del cual se paga la última anualidad para extinguir la deuda, se tendrá:

$$cq^n - aq^{n-1} - aq^{n-2} \ldots - aq^2 - aq - a.$$

Escribiendo como sustraendo los términos que siguen del primero, resulta:

$$cq^n - (aq^{n-1} + aq^{n-2} + aq^{n-3} + \ldots + aq^2 + aq + a).$$

Lo que nos dice que la deuda con sus intereses compuestos en n períodos debe ser extinguida con la suma de los capitales formados por las anualidades pagadas, de manera que se puede anotar la igualdad:

$$cq^n = (aq^{n-1} + aq^{n-2} + \ldots + aq^2 + aq + a)$$

$$= \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

Si la deuda se sirve pagando la anualidad al principio de cada período (pago anticipado), la progresión del segundo miembro tendrá un término más y la fórmula será:

$$cq^n = \frac{a(q^{n+1} - 1)}{q - 1}$$

Observación. En el servicio de deudas amortizadas por anualidades, los intereses del capital prestado no se capitalizan. sino que se pagan en

cada período, determinando el monto de la anualidad por el tanto por ciento de interés, más un tanto por ciento de amortización. Como la deuda va disminuyendo en cada período, los intereses disminuyen también y crece la amortización, para que la anualidad permanezca constante. De aquí deriva el nombre de *amortización acumulativa*

Como en los problemas relativos a las amortizaciones acumulativas, el interés del capital en cada período es una parte de la anualidad, esta anualidad es evidentemente superior al interés de la deuda en cada período.

Ejercicios.

1. ¿Qué capital se forma colocando semestralmente:

a) E° 450 al 5% durante 6 años?
b) E° 500 al 6% durante 7 años?
c) E° 630 al 7% durante 8 años?

2. Un padre coloca anualmente en un banco E° 240 a favor de su hijo mayor, y a partir de su primer cumpleaños. ¿Qué capital recibirá el joven al cumplir 25 años de edad, si el banco abona el 7% con capitalización anual de los intereses?

3. ¿Con qué anualidad, se formará un capital de:

a) E° 35 000 al $4\frac{1}{2}$% en 15 años, con capitalización semestral?

b) E° 25 000 al $6\frac{1}{2}\%$ en 20 años, con capitalización anual?

c) E° 40 500 al 5% en $15\frac{1}{2}$ años, con capitalización semestral?

4. ¿Qué suma de dinero deberá depositar semestralmente en un banco una persona a los 24 años de edad para recibir, a los 50 años de edad, E° 30.000, si el banco abona $5\frac{1}{2}\%$ de interés compuesto? ¿Cuál sería la mensualidad correspondiente?

5. ¿Con cuántas anualidades de E° 75 depositados semestralmente y ganando 7% de interés se formará un capital de E° 4 000?

6. Una municipalidad levantó un empréstito de E° 1.500.000, al $4\frac{1}{2}\%$, y debe amortizarlo en 30 años. ¿Qué anualidad tiene que pagar al fin de cada año?

7. Una municipalidad se compromete a pagar durante 20 años E° 10 875 anuales como servicio de una deuda al $5\frac{1}{2}\%$. ¿Cuál es la deuda?

8. Anotar un cuadro que indique el servicio de intereses y amortizaciones durante 5 años, de una deuda hipotecaria de E° 24 000, en letras de 7% con 1% de amortización. La deuda se amortiza en cada semestre.

9. ¿A cuánto queda reducida una deuda hipotecaria de E° 45 000, en letras del 8%, con 1% de amortización, después de un servicio de 9 años? Los dividendos se pagan por semestres anticipados.

RESPUESTAS

CAPITULO I

Págs. 25 - 26

9. 199; 484; 100; 55.
10. 6.
11. 225.
12. 100.
13. 36.
14. 0.
15. 1.
16. 82.
17. 52.
18. $7\frac{18}{49}$

Págs. 31 - 32

14. $y-5x$.
15. $a+b-c$.
16. $50x-8y-41z$.
17. $5p-40q-10r$.
18. $7a+14b$.
19. $29a-b-c$.
20. $m-4n$.
21. $x+2y$.
22. $8a-9b-7c$.
23. $22x-60y+5z$.
24. $2\frac{5}{12}a-1\frac{1}{2}b+c$.
25. $4a+4\frac{1}{3}b+7c$.
26. $1\frac{1}{4}a+2\frac{1}{3}b+1\frac{1}{3}c$.
27. $0{,}4b$.
28. $0{,}75x-0{,}2y+1{,}5a-b$.
29. $3{,}8a-1{,}1b$.
30. $-a^2b-4a^2$.
31. $4xy-7x^2a$.
32. x^3y^2-8xy.

CAPITULO II

Págs. 41 - 44

1. $9a-8b$.
2. $6x-8y-15z$.
3. $4a^2+2a-21b-12$.
4. $6x^3+x^2y-xy^2$
5. $5a+2b-2c$.
6. $3ab+7a+1$.

7. $3x^2—3xy+5y^2$.
8. $7m+5n—4$.
9. $a^2—ab+b^2+ac—bc+c^2$.
10. $x^4—36x^3y+42x^2y^2—$ $—34xy^3$.
15. $10a—2b$.
16. $1\frac{3}{8}x—\frac{1}{6}y$.
17. $6{,}5a+4{,}5b$.
18. 515.
22. y.
23. $p+q$.
24. $a—b$.
25. $—5c—17d$.
26. $7{,}3x+3{,}2y$.
27. $3{,}6a—1{,}5b$.
28. $6\frac{13}{24}m—5\frac{7}{18}n$.
29. $5\frac{1}{4}x—\frac{1}{7}y$.
30. b.
31. $x—2z$.
32. 20.
33. $3x^2$.
34. $b+2c$.
35. $x+y—z$.
36. $a+b$.
37. $6x—36y—17z$.
38. $1—x$.
39. $r—6t—s$.
41. $4a—2c$.
42. $—1—5x$.
43. $10x—18$.
44. $2a$.
45. $2x—3y+z$.
46. $7x+54y—4z$.
47. $x+7y—9z$.
48. $\frac{1}{3}a—x+b$.
49. $\frac{1}{2}y$.
50. $a—(b+c)$.
56. $m—(—p—5+n)$.

Págs. 46 - 47

15. 46
16. 17.
18. —1.
21. $m+n$.
22. $p—q$.
23. a.
24. $c—d$..
27. 10.
28. 8.
29. 5.
30. —12.
31. 10.
32. 12.
33. 10.
34. —14.
35. 3.
36. 1.
37. $\frac{1}{b}$
38. b.
39. $\frac{p-n}{m}$
40. 5.
41. 6.
42. 2.
43. $\frac{34}{21}$.
44. 8.
45. 5.
46. 7.
47. $\frac{10}{3}$.
48. 3.
49. $a—b$.
50. a.
51. b.

Págs. 49 - 50

5. $q—p$.
6. $a+3$.
7. 15.
8. 24.
9. 18.
10. 84.
11. 74° 40′, 60° 40′, 44° 40′.
12. 88, 44, 22.
13. 84, 86, 88.
14. 71, 73, 75, 77.
15. 3, 33, 64.
16. E° 16 200 y E° 5 400.
17. E° 80, E° 60, E° 40.
18. 124, 94.
19. 37, 35, 28.
20. 4 ds.
21. a 294 km. de A.
22. 3 P. M.
23. 8 de E° 1 y 32 de E° 5.

CAPITULO III

Págs. 64 - 69

26. a^{m+3}.
27. a^n.
28. a^{n-1}.
29. x^{n+3}
30. y^{2p+5}.
31. z^{4n}.
32. a^5b^9.
33. $x^{12}y^7z^{14}$.
40. $14a^2c^3$.
41. $120x^5y^5$.
42. $70a^6b^5$.
43. $180x^6y^5z^4$.
44. $—15a^4b^3$.
48. $—180xyz$.
49. $420a^3b^6$.
58. $8a^2+4a^3b+6a^3c$.
59. $15x^2—21x^4y—12x^3y$.
60. $—3a^3b+6a^2b^2—3ab^3$.
61. $—18x^3y^2+30x^2y^4+$ $+24x^3y^3$.
65. $x+4z$.
66. $—4y—34z$.
67. $5a+3b$.
68. $58y$.
69. $36a—9b$.
70. $204a—60ab—204a^2$.
91. $4ab(5a+3b—1)$.
92. $5xy(2x—3y+5)$.
93. $(x—y)(a+b)$.
94. $(2a+b)(3—c)$.
95. $2a(a+b)$.
96. $(x+y)(2a—3)$.
97. $a(p+q)+b(m+n)$.
98. $x(y—1)+3(z—2)$.
99. $(x+y)(x+z)$.
100. $(a+3)(b+5)$.

101. $(b+1)(a-1)$.
102. $(x+8)(x+9)$.
120. x^3+1.
121. x^4-1.
122. $2x^2+6x+4$.
123. $4a^2+8a-32$.
124. 0.
125. $10x^2+6y^2+4z^2+19xy+22xz+11yz$.
127. $8x^5-44x^4+3x^3-29x^2+9x+18$.
128. $x^3+9x^2+26x+24$.
129. $a^3-10a^2+31a-30$.
138. $2x^2-10x-168$.
139. $4x^2-8x-572$.
140. $5x^2-20x-960$.
141. $(x+2)(x+4)$.
143. $(x+14)(x-4)$.
145. $(y+3)(y-10)$.
147. $(x+7)(x-12)$.
149. $(x+15)(x-8)$.
151. $(a-3b)(a-4b)$.
155. $x^2+8x+16$.
157. $25x^2+10x+1$.
158. $1-14y+49y^2$
167. $1\,225a^2+1\,400ab+400b^2$.
168. $3x^2+30x+75$.
171. $1\,440b^2-3\,600bc+2\,250c^2$.
172. $18a^2-18ab+5b^2$.
173. $4pq$.
174. $8x^2+18y^2$.
175. $24xy$.
176. $2a^2-6ab-30b^2$.
177. $6xy-4y^2$.
178. $92xy+15y^2$.
179. $a^2+b^2+c^2+d^2+2ab-2ac+2ad-2bc+2bd-2cd$; $4x^2+9y^2+9a^2+16b^2-12xy-12ax-16bx+18ay+24by+24ab$.
180. $64+a^2+9b^2-16a-48b+6ab$; $4x^2+y^2+z^2+16+4xy+4xz+16x+2yz-8y-8z$.
184. $4a^2+9b^2+25-12ab+20a-30b$; $49+25a^2+36b^2-70a-84b+60ab$.
185. $34n^2-112mn-112m-16$.
188. $y^2-18y+81$.
190. $p^2+16pq+64q^2$.
192. $169y^2-390y+225$.
194. $64x^2-80xy+25y^2$.
197c. $y^3\pm 3y^2+3y\pm 1$.
198a. $8a^3\pm 36a^2+54a\pm 27$.
199c. $1\,000c^3\pm 1\,200c^2+480c\pm 64$.
200. x^2-1; y^2-4.
202. $49a^2-16b^2$; $64x^2-36y^2$.

204. $324u^2-169v^2$; $361a^2-289b^2$.
206. a^4-b^4; x^6-y^6.
207. $2xy+2y^2$.
208. $16a^2+40ab+25b^2-36c^2$.
209. $36x^2-16y^2+40yz-25z^2$.
210. $9x^2+60xy-25y^2$.
211. $250xy-176x-10y+23$.
217. $(x+y)^2$; $(p-q)^2$.
218. $(a-1)^2$; $(m-3)^2$.
219. $(3x-2y)^2$; $(6n+7p)^2$.
220. $(m-n)^2$; $(x+y)^2$.
221. $(x+y)(x-y)$; $(x+1)(x-1)$.
222. $(9a+8b)(9a-8b)$; $(11x+16y)(11x-16y)$.
223. $(17m+18n)(17m-18n)$; $(19+12p)(19-12p)$.

Págs. 70 - 71

1. 3.
2. 1.
3. 5.
4. 8.
5. —5.
6. 8.
7. 5.
8. 8.
9. 3.
10. $\frac{b}{a}$
11. $a+b$.
12. 1.
13. 1.
14. $4b$.
15. $\frac{7}{9}$
16. 5.
17. $-\frac{1}{8}$
18. 11.
19. $\frac{11}{9}$
20. —1.
21. 1.
22. 33.
23. —1.
24. 2.
25. 5.
26. 6.
27. 4.
28. 9.
29. —5.
30. 2.
31. 0.
32. 11.
33. 7.
34. 5.
35. —4.
36. 9.
37. $-a$.
38. $-b$.
39. $\frac{a}{3}$
40. $\frac{a+b}{2}$

Págs. 71 - 74

1. 100.
2. 8.
3. 9 y 15.
4. 24, 25 y 26.
5. 48 y 12 años.
6. 13.
7. 10, 15 y 30 años.
8. 90 l.

9. 14 c. y 21 g.
10. 8.
11. 24 m.
12. E° 2,10, E° 3 y E° 0,75.
13. 63.
14. 75.
15. 246.
16. 25, 25 y 15.
17. 15 pers. E° 370
18. E° 3,90.
19. 40 y 12 años.
20. Hace 4 años.
21. 144 km.
22. 2 y 15.
23. 14.
24. 36 m.
25. E° 15.

CAPITULO IV

Págs. 86 - 100

9. $95a^2b$.
15. $-\frac{x}{y}$; $-\frac{a}{b}$; $\frac{a}{b}$
17. p^{n-1}; q^n; m^{n-2}.
18. a^{x-y}; y; z^{2a+1}
25. 4; 7.
26. x; $p+q$.
27. $7x-5y$.
28. $2a+5$.
30. $3y+5$.
31. $4q-7$.
32. $x-2$.
35. $x-12$.
39. $-4x^2$; $-5b$.
41. $5ab^2c$.
45. $-4a$; -1; $\frac{5b}{3y}$
46. 12; $\frac{10}{x}$
47. $\frac{5c}{2a}+21-\frac{33b^2}{2}$
48. $3cy+18xy-20x^3y^2$.
49. $10x-6+9a$.
50. $yz+xz+xy$.
53. $\frac{a}{5b}$; $\frac{3a}{x}$; $\frac{2b}{c}$.
54. $\frac{5a}{2b}$; $\frac{3}{5c}$; $\frac{3z}{5p}$.
55. $\frac{1}{3(b+x)}$; $\frac{6}{5}$.
56. $\frac{a-2}{3(a+2)}$; 4.
61. $\frac{x}{y}$; $\frac{1}{8x-7y}$; $\frac{6}{11}$
62. $\frac{x-4}{x+4}$; $\frac{3x+5}{2}$; $\frac{x-5}{x-4}$
63. $\frac{2y-1}{3}$; $\frac{x+2}{x+3}$; $\frac{x-2}{x+2}$
67. $\frac{x^2-9}{x+5x-24}$

71. $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{10}$; 1.
72. $\frac{a+1}{a-1}$; $\frac{3a-2b}{3a+2b}$; x.
73. $\frac{1}{x-3}$; $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{-6y}$
74. 1; $\frac{2x-2}{6x-1}$; $\frac{1}{3x+4}$
77. $\frac{3a-5b}{3a}$
78. $2a+5b$.
79c. $\frac{bx+ay}{ab}$
80. $\frac{2a+b}{2x}$; $\frac{a-1}{a^2}$
81. $\frac{11a-11b}{6}$
83. $a-b$.
84. $\frac{1}{12(a-2)}$
85. $\frac{2p-q}{24(p-q)}$
86. $\frac{x+26}{30(x+2)}$
87. $\frac{a-b}{a+b}$
88. $\frac{1}{x-4}$
89. $\frac{a+8}{a+5}$
90. $\frac{3-x}{x^2-3x+2}$
91. $\frac{x}{x-3}$
93. $\frac{3a-1}{a}$; $\frac{3a-b}{3}$; $\frac{a-5}{5}$
94c. $\frac{a^2-a+1}{a}$
95. $\frac{b}{b-a}$; $\frac{b}{a-b}$; $-\frac{b}{a+b}$
96. $\frac{8x+3}{5}$; $\frac{x-y}{2x-y}$
99. $\frac{5b}{2xy}$; $\frac{2a^5xy}{3b^5}$
100. $\frac{a}{x^2-y^2}$; $\frac{2(x-y)}{x}$
101. $\frac{2a-3}{4-3b}$; $\frac{2x^2y^2}{3a^2}$
102. $\frac{1}{7y}-\frac{x^2}{3y}+\frac{x^2}{105}$
103. $\frac{a^2}{c}+\frac{ab^2}{c^2}+b$.
104. $\frac{9}{25}-\frac{x^2}{y^2}$
105. $\frac{5a^2}{b^2}+\frac{21b}{8a}+\frac{10a}{3b}$

$-\frac{2}{3}.$

106. 1.

107. 1.

111 $\frac{3}{4}$; x^2-y^2.

112. $\frac{a}{a-3}$; $\frac{a-b}{x-y}$

113. $\frac{a+b+c}{x+y-z}$

115. $\frac{x^2}{3}$; $\frac{a}{b}$

116. ab; 1.

117. $\frac{a-2x}{2x}$; $\frac{3a-2b}{6}$

118. $\frac{a+b}{4a}$

120. $2p-q$; $-4x+3y$

122. $4mn-2m+7n$.

123. $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$; $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

124. $2y^2z^2-5xyz+4x^2$.

125. $\frac{4}{3x}-\frac{3}{4y}$

126. $\frac{9a}{5}-b+\frac{12c}{a}$

127. $\frac{a}{30}+\frac{1}{9}-\frac{1}{90a}$

128. $15a-8b+14c$.

129. $2ax-\frac{8}{3}cy+3d$.

130. $-\frac{b}{2}+\frac{2x}{3}+\frac{4cy}{3}$

131. 8.

132. 7a.

133. 7xy.

134. $x+6$.

135. $6x+7$.

136. $9x-5y$.

137. $9p+8q$.

138. $3x^2-7xy+5y^2$.

139. $x^2+xy-2y^2$.

140. $5x+y$.

141. a^2+ab-b^2.

142. $2x^3-3x^2-3x+5$.

143. $3a^2+4ab+5b^2$.

144. $8a+9$.

145. $7y+5xy-2x$.

146. $x^3-x^2y+xy^2-y^3$.

147. $a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+$
$+ab^4+b^5$.

148. $x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+$
$+y^4$.

149. $\frac{2}{3}a+1$.

150. $\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b+\frac{1}{4}c$.

151. $8x-6y$.

152. $6a-8b$.

Págs. 101 - 107

1a. 12.

2a. 6.

3a. 0.

4a. 4.

5. 6; 3.

6. 12; 20.

7. 5.

8. $-\frac{20}{29}$.

9. 8.

10. 120.

11. 36.

12. $2\frac{1}{2}$.

13. 7.

14. $\frac{1}{8}$.

15. $\frac{55}{3}$.

16. —5.

17. 7.

18. 5.

19. $\frac{17}{23}$.

20. $\frac{9}{16}$.

21. 3,19.

22. 2.

23. 8.

24. 16.

25. —10.

26. 5.

27. 14.

28. 1 y $-\frac{9}{2}$

29. 6 y 14.

30. -3 y $\frac{4}{5}$.

31. -7 y $-\frac{2}{3}$.

32. $-\frac{7}{5}$.

33. $-\frac{1}{11}$.

34. 5.

35. $\frac{19}{16}$.

36. $\frac{78}{17}$.

37. 6.

38. 6.

39. 6.

40. 2.

41. $\frac{1}{5}$.

42. $\frac{1}{2}$.

43. 2.

44. 2.

45. 2.

46. 7.

47. 4,5.

48. $\frac{19}{4}$.

49. $\frac{1}{21}$.

50. 16.

51. 6.

52. $\frac{15}{77}$.

53. $\frac{ab}{a-1}$

54. $a+b$.

55. $\frac{abc}{a^2+b^2+c^2}$

56. 0.

57. $\frac{a+b}{2}$

58. $2a-3b$.

59. $\frac{b-a}{3a}$

60. b.

61. $\frac{2ab}{a+b}$

62. $\frac{ab}{b-c}$

63. $a+b$.

Págs. 108 - 112

5. 6,3.

6. 144.

7. 120.

8. 60.

9. 75.

10. E° 120.

11. E° 1 500.

12. 36 n.

13. 120.

14. 11.

15. 8 pers., E° 35.

16. $\frac{21}{35}$.

17. 11.

18. 30 km, 12 M.

19. $6\frac{1}{2}$h, 60 $\frac{15}{16}$km.

20. 6 d 6 h.

21. 2 h 24 min.

22. 9 años.

23. 28 y 18 años.

24. 160 y 40.

25. 48 km.

26. 5 m. Circunferencia: 25m.

27. 6,2 km.

28. A: E° 420, B: E° 360, C: E° 240.
29. E° 28 000.
30. E° 9 000.
31. E° 48 000 y E° 40 000.
32. 5% y 7%.
33. 6%.
34. E° 20 000 y E° 30 000.
35. E° 12 411.
36. 11½ años.
37. E° 9 900.
38. 70 días.
39. 200 kg.
40. 60 l de la 1.ª clase y 40 l de la 2.ª
41. 15 min.

CAPITULO V

Pág. 121

1. $x > 7$.
2. $x > 2$.
3. $x > 3$.
4. $x < \frac{2}{7}$.
5. $x < 5$.
6. $x < -5$.
7. $x > \frac{1}{8}$.
8. $x > 1$.
9. $x > \frac{19}{13}$.
10. $x > -\frac{3}{2}$.
11. $x < \frac{5}{3}$.
12. $x > 1$.
13. $x > 11$.

CAPITULO VI

Págs. 127 - 132

1. $x = 5;\ y = 3$.
2. $x = 19;\ y = 10$.
3. $x = 4;\ y = 3$.
4. $x = 4;\ y = 2$.
5. $x = 2;\ y = 3$.
6. $x = 1;\ y = 5$.
7. $x = 1;\ y = 2$.
8. $x = 10;\ y = 9$.
9. $x = 0;\ y = 2$.
10. $x = 7;\ y = 1$.
11. $x = 1;\ y = 0$.
12. $x = 20;\ y = 7$.
13. $x = 2;\ y = 1$.
14. $x = 4;\ y = 15$.
15. $x = 5;\ y = 2$.
16. $x = 10;\ y = 2$

17. $x = 5;\ y = 1$.
18. $x = 6;\ y = 2$.
19. $x = 1;\ y = 1$.
20. $x = \frac{1}{2};\ y = \frac{1}{3}$.
21. $x = \frac{2}{3},\ y = \frac{3}{5}$.
22. $x = \frac{5}{12},\ y = \frac{7}{3}$.
23. $x = 3,\ y = 5$.
24. $x = 2,\ y = 1$.
25. $x = 2,\ y = -3$.
26. $x = -5,\ y = 4$.
27. $x = 7,\ y = 5$.
28. $x = 1,\ y = 3$.
29. $x = 4,\ y = 1$.
30. $x = 0,\ y = 8$.
31. $x = 7,\ y = 5$.
32. $x = 3,\ y = 1$
33. $x = 12,\ y = 7$.
34. $x = 4,\ y = 3$.
35. $x = 12,\ y = 6$.
36. $x = 2,\ y = 12$.
37. $x = 3,\ y = 2$.
38. $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{4}$.
39. $x = 60,\ y = 5$.
40. $x = 12,\ y = 15$.
41. $x = 36,\ y = 12$.
42. $x = 2,\ y = 15$.
43. $x = 0,\ y = 0$.
44. $x = \frac{a+b}{2},\ y = \frac{a-b}{2}$.
45. $x = 2a + 4b,\ y = a + b$.
46. $x = \frac{a+b}{m+n},\ y = \frac{an-bm}{m+n}$
47. $x = ab,\ y = b$.
48. $x = m,\ y = n$.
49. $x = 3a,\ y = 3b$.
50. $x = \frac{3a+b}{18},\ y = -\frac{a+3b}{18}$.
51. $x = 3,\ y = 2,\ z = 1$.
52. $x = 5,\ y = 0,\ z = 1$.
53. $x = 2,\ y = 3,\ z = -1$.
54. $x = 10,\ y = 20,\ z = 0$.
55. $x = 2,\ y = 3,\ z = 5$.
56. $x = -1,\ y = -2,\ z = -3$.
57. $x = 7,\ y = 6,\ z = 5$.
58. $x = 10,\ y = 2,\ z = 20$.
59. $x = 15,\ y = 6,\ z = 10$.
60. $x = a + b,\ y = 3ab,\ z = 4ab$.

Págs. 133 - 134

1. 50 y 34
2. 25 y 10.
3. té E° 6, café E° 4
4. $\alpha = 70°,\ \beta = 50°,\ \gamma = 60°$
5. V. barco $= 20 \left[\frac{km}{hr}\right]$
   V. río $= 5 \left[\frac{km}{hr}\right]$
6. 8, 10 y 16.
7. 120 y 80.
8. 56 y 10.
9. 120 y 35.
10. 17 y 10.
11. 37.
12. 42.
13. 753.

14. 18, 18 y 22.
15. 384 m^2.
16. 44 cm y 30 cm.
17. 40 m y 15 m.
18. 15 cm y 9 cm.

CAPITULO VII

Págs. 150 - 155

6. a) 72 : 36 = 48 : 24
7. h) $\frac{x}{p+q} = \frac{-a}{b}$
8. a) 25; 16
   b) 2; 4
   c) 1; 9
   d) 1; 10
   e) 2; $\frac{bc}{a}$
9. a) 18: 15
   b) 20; 35
   c) 30; $\frac{a(m+n)}{m-n}$
12. a) 6; b) 12; c) 30.
14. a) 5; b) $\frac{8}{3}$; c) $\frac{5}{12}$;
    d) $\frac{20}{9}$; e) $\frac{7}{6}$; f) 6.
    g) 8; h) $\frac{4}{3(a-b)^2}$
17. a) x = 12, y = 16, z = 20;
    b) x = 24, y = 15, z = 6;
    c) x = 20, y = 35, z = 50.
18. c) x = 45, y = 36, z = 54, u = 18.
19. c) a : b : c : d = 10 : : 15 : 18 : 16;
    d) a : b : c : d = 12 : : 15 : 50 : 400;
    e) a : b : c : d = 24 : : 28 : 27 : 26;
    f) a : b : c : d = 9 : : 14 : 15 : 16.
20. 20.
21. 8.
22. 105 y 75.
23. 108 y 60.
24. 36 : 54.
25. 28 : 36.
26. E° 1 800 y E° 2 400.
27. E° 204 y E° 119.
28. E° 20 000, E° 24 000 y E° 28 000.
29. 55 m.
30. 1 h 57 min 36 seg.
31. A: E° 78,40, B: E° 117,60 y C: E° 196.
32. E° 920,62. 180 bonos.

33. E° 204.
34. 48 días.
35. 4 224 kg de c., 1 320 de s. y 396 de a.
36. A: E° 1 800, B: E° 3 000, C: E° 5 250 y D: E° 8 400

Págs. 156 - 158

1. 11.
2. 11.
3. 7.
4. 13.
5. 8.
6. 15.
7. 7.
8. $\frac{23}{39}$.
9. 3.
10. 11.
11. —5.
12. 5.
13. 179.
14. 12.
15. 8.
16. —2.
17. 7.
18. a—b.
19. 0.
20. 9m.
21. $\frac{a^2}{m}$
22. 0.
23. 8b—4a.
24. $\frac{3b-2a}{3a-2b}$
25. $\frac{3a-5m}{5a-3m}$
26. 8 y 12 cm.
27. 20 y 24 m.
28. 12 y 15 m.
29. 70°, 70° y 40°.
30. 27° y 63°.
31. 24°, 72° y 84°.
32. 24 y 30 años.
33. 12 y 15 años.
34. E° 7,50 y E° 10,50.
35. 405, 351 y 243.
36. 64 km y 42 km.
37. $1\frac{1}{2}$ P M.
38. E° 96
39. 108 kg.

EJERCICIOS DE RECAPITULACION

Págs. 159 - 167

1. $(a+2)(b+3)$.
2. $(a-5)(b-2)$.
3. $(2a-1)(b+1)$.
4. $(5x-2)(2y+3)$.
5. $(x+4)(y+5)$.
6. $(a-8)(b-2)$.
7. $(3x+y)(x-b)$.
8. $(3x+2y)(ax-by)$.

9. $(2a-5)(3b+2)$.
10. $(mx+n)(pq-n)$.
11. $(x^2+3)(y^2-1)$.
12. $(a+b)(ac+bd+2)$
13. $(a^2+3)(a^2-3)$.
14. $(a+b+1)(a+b-1)$.
15. $(1+x+y)(1-x-y)$.
16. $(1+x-y)(1-x+y)$.
17. $(a-b+c-d)(a-b-c+d)$.
18. $(5c+d)(c+5d)$.
19. $(a+b+c)(a+b-c)$.
20. $(x-y+z)(x-y-z)$.
21. $(1+x+y)(1-x-y)$.
22. $(a+b-c)(a-b+c)$.
23. $(m+n+q)(m+n-q)$.
24. $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$.
25. $(a+1)(2a+1)$.
26. $(3a+5)(2a-1)$.
27. $(x+1)(3x+2)$.
28. $(3x+1)(2x-3)$.
29. $(5x+2)(x-2)$.
30. $(3y+2)(y-1)$.
31. $(4a-1)(a-1)$.
32. $(2a^2+3)(a^2+1)$.
33. $(3+a)(2-a)$.
34. $(5+a)(2-a)$.
35. $(3a-7)(1-a)$.
36. $(4+5a)(2-a)$.
37. $(c+d)(c^2-cd+d^2)$.
38. $(a+1)(a^2-a+1)$.
39. $(a-1)(a^2+a+1)$.
40. $(a+3)(a^2-3a+9)$.
41. $(5+x)(25-5x+x^2)$.
42. $(6-a)(36+6a+a^2)$.
43. $(1+4a)(1-4a+16a^2)$.
44. $(2c-4a)(4c^2+8ac+16a^2)$
45. $(10+b)(100-10b+b^2)$.
46. $(ab-c)(a^2b^2+abc+c^2)$.
47. $(a-2b^2)(a^2+2ab^2+4b^4)$.
48. $(m-n-1)\ [(m-n)^2+m-n+1]$.
49. $\frac{a^2-2}{a^2-5}$.
50. $\frac{x+1}{a-2}$.
51. $\frac{a+3}{a-1}$.
52. $\frac{a+1}{a-1}$.
53. $\frac{y-1}{y+1}$.
54. $\frac{ab}{a-2}$.
55. $\frac{x+3}{2}$.
56. $\frac{a+b}{a-b}$.
57. $\frac{2a}{a+b}$.
58. $\frac{1}{1-a^2}$.
59. $-\frac{x+c}{(x-a)(x-b)}$.
60. 0.
61. 1.

62. $\frac{16a}{(1-2a)^2(1+2a)}$.
63. $\frac{4a^2}{b^4-a^4}$.
64. $\frac{x^3}{(x-y)(x^2+y^2)}$.
65. $\frac{3}{(a-1)(a-3)}$.
66. $\frac{a-b}{c-a}$.
67. a^2-b^2.
68. $x-2$.
69. 1.
70. $\frac{1}{a}$.
71. $\frac{x}{y}-1+\frac{y}{x}$.
72. $\frac{a}{b}$.
73. $-\frac{y^2}{x^2}$.
74. a) $\frac{5}{2}$. b) $\frac{12}{5}$. c) $\frac{29}{12}$. d) $\frac{70}{29}$.
75. $\frac{4a+5}{11a+10}$.
76. $\frac{2z-1}{z}$.
77. $\frac{b-a}{ab}$.
78. $\frac{a^2-4a+2}{a^2-5a+2}$.
79. $2a$.
80. $\frac{5a+3}{a^2-1}$
81. a.
82. $\frac{a-1}{a^2+1}$.
83. $\frac{1}{a-1}$
84. $2a$.
85. $\frac{851}{146}$
86. 1.
87. 2.
88. $3ab-2a^2-2b^2$.
89. $-2a$.
90. $\frac{ac}{b}$.
91. $\frac{bd-2bc}{2ac-cd}$.
92. $-\frac{1}{2m}$.
93. b.
94. $\frac{b}{2}$
95. $\frac{1}{2}$.
96. $\frac{2(a-b)(b-c)}{c-a}$.

97. $a+b$.
98. 4.
99. $\frac{7}{2}$.
100. 21.
101. 2.
102. -1.
103. $\frac{1}{4}$.
104. 0.
105. $\frac{1-a-ab^2}{b}$
106. $\frac{97}{7}$.
108. $\frac{9}{4}$
109. $\frac{7}{30}$
110. E° 270; E° 216; E° 180; E° 135.
111. 11 años.
112. a) $a:b:c:d=4:5:14:6$
b) $a=8$; $b=10$; $c=28$; $d=12$.
113. 1 365 m.
114. a) $\frac{100\ k}{m}$. b) $k=\frac{m}{5}$.
115. 4% de pérdida.
116. 18 ton. de Zn, 30 ton. de Cu y 75 ton. de Sn.

CAPITULO IX

Págs. 182 - 183

1. $\frac{15}{2}$
2. -21
3. 48
4. 20
5. 105
6. $\frac{54}{5}$
7. 9
8. 72
9. $\frac{1}{9}$
10. $\frac{1}{3}$
11. $\frac{5}{9}$
12. a) Se mult. por 9
b) Se div. por 100
13. a) Se mult. por 8
b) Se div. por 125
14. a) Se divide por 9
b) Se mult. por 100

CAPITULO X

Págs. 193 - 199

11. $p^{4n-6m+3}$; $x^{2n-6}y^{2n-8}$
12. $\frac{4}{5}a^7x^{10}$; $3a^{14}b^{14}$.
13. $\frac{a^mb^{2m-3n}}{m^2-n^2}$; $\frac{a^5b^7}{c^5}$.
14. $\frac{x^{3n+1}y^{3-p}}{z^{7a+2}}$; $\frac{m^yn}{p^{y+1}}$.
16. $a^{n+3}+a^{n+2}+a^{n+5}+a^n$.
17. a) $\frac{1+x^2}{x^6}$; b) $\frac{15-20x-18x^2}{390x^{10}}$;
c) $\frac{x^4+y^4}{x^4-y^4}$; d) $\frac{a-b}{12(a+b)^4}$.

24. $3(x+y)$; $3ab^2$; $4x^3y^2$
25. x^n; a^2; x^{2n}.
26. a^{3b-2c}; a^3; $a^{m+7n-7c+18d}$
28. x^7+x^5; $8x^3-5x$.
29. $5a^4-6a^2$.
33. d) $x^6 \mp x^5y + x^4y^2 \mp$
$\mp x^3y^3 + x^2y^4 \mp xy^5 + y^6$
34. 1) $(a^2+ab+b^2)(a-b)$;
3) $(y^2+y+1)(y-1)$.
42. $(\frac{5}{6})^3$; $(\frac{4}{3})^2$.
43. b) $\frac{6^2m^4b^5}{4^3a^8n^5}$
44. $\frac{2ab^2c^3d^4}{3m^5n^6p^7q^8}$
45. $\frac{c^{3m+3}d^{4m+4}}{a^{m+1}b^{2m+2}}$.
47. 125, 1; x^5.
48. 1.
49. $\frac{1}{4}a^3$.
50. b) $(4a^2-9b^2)^m$.
53. 4; 10^5; 10^4.
57. $\frac{6ab^4}{5cd^2}$
62. 9^3; 10^4.
63. 640.
64. $(15xy)^2$; $(5a)^4$.
65. 3^5; $\frac{(15x-2y)^2}{9}$
66. $(9a-11b)^2$
67. $(6a-5b)^2$.
68. $(8x+5y)^n$.
72. 4^4; 16^3; $(\frac{1}{8})^2$.
73. $\frac{25a^3}{84b^2c}$.
74. b) $\frac{5}{2^9}$.
75. a) $\frac{2ab^6}{15cd^6}$;
b) $\frac{c-d}{(a+b)^3}$;
c) $\frac{(p-q)^3}{(p+q)(m^2-n^2)}$
77. a^{40}; 10^6; $\frac{x^8y^{12}}{p^4q^8}$
78. a^2b^2; $\frac{a^m}{b^m}$
79. $\frac{b^{18}c^7}{a^6}$; $\frac{y}{x^2z^3}$
84. x^6, y^{10}.
85. $(x^n+y^n)(x^n-y^n)$
89. c) a^{2n}.
90. c) a^4b^4.
91. 0.
92. $\frac{9}{4}$; -64.
93. 81; $(\frac{2}{7})^3$
94. $92a^{12}$.
95. $\frac{57}{16}$.
96. 5 192.
97. 20; 40; 60; 80
98. 0.

CAPITULO XI

Págs. 202 - 203

10. 3; 1; 8; 7.
15. 53; 8; 2.
16. c) $405-180\sqrt{5}$.
17. $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$.
18. $a-b+c$.
19. $\frac{1}{3}$; x^2-xy+y^2
21. $b=38$, $h=19$.

Págs. 204 - 205

4. $a+b$.
5. x.
6. p.
7. $(x-y)(a+b)$.
10. $5\sqrt{3}$; $4\sqrt{2}$; $5\sqrt{2}$; $6\sqrt{2}$.
12. $28\sqrt{2}$.
13. $36\sqrt{3}$.
14. $25\sqrt{5}$.
15. $135\sqrt{2}$.
16. $3\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $2\frac{2}{3}\sqrt{5}$; $2\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Págs. 206 - 207

4. $6a$; $10y$; $6x$.
5. $12+4\sqrt{3}$; $14-7\sqrt{5}$.
6. 1; 3.
7. 4; 1.
8. 2; 3.
9. $18+12\sqrt{2}$; 2.
10. $182+96\sqrt{3}$; 192.
11. $2x+2\sqrt{x^2-1}$; 6.
12. 4.
13. $4b$.
14. $\dfrac{x+y}{x-y}$
16. $6+2\sqrt{14}$.
17. $23-8\sqrt{3}$.
18. $6+12\sqrt{6}$.
19. 30.
20. 24.
21. $a+b$; $3(x+1)$.

Págs. 209 - 210

1. $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{15xy}$; $4\sqrt{\frac{6}{x}}$.
2. $\sqrt{m}$; $\frac{a}{2}\sqrt{15}$.
3. $\sqrt{ab}$; $\sqrt{x^2+y^2}$.
4. $\sqrt[2]{ax}$; $\sqrt[3]{6}$; $\sqrt[3]{15}$.
5. 1; 3.
6. 1; 44.

8. $\dfrac{5\sqrt{2}+6}{2}$; $\dfrac{3\sqrt{3}-4}{3}$
9. a) $3(2-\sqrt{2})$.
10. a) $\frac{1}{4}(13+\sqrt{5})$;
d) $\frac{1}{3}(5+\sqrt{10})$.
11. $\frac{1}{5}$; $\sqrt{2}-1$; $2-\sqrt{3}$.
12. $5+2\sqrt{6}$; 2.
13. $1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$; $\frac{1}{2}(2\sqrt{3}+$
$+3\sqrt{2}+\sqrt{30})$.
14. $\frac{1}{2}(2+\sqrt{6}-\sqrt{10})$;
$\frac{1}{5}(2\sqrt{14}-1)$.
15. $\sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[4]{x^3}$; $\dfrac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}$;
$\sqrt[x]{a^{x-1}}$

Págs. 211 - 212

4. $\frac{9}{4}$; $\frac{14}{5}$; $\frac{5}{6}$.
5. $\frac{1}{4}\sqrt{3}$; $\frac{3}{5}\sqrt{2}$; $\frac{43}{114}$.
6. $-3\frac{11}{30}$.
7. 0.
8. $\dfrac{\sqrt{x+y}}{x+y}+\dfrac{\sqrt{x-y}}{x-y}$
9. $\frac{83}{120}$.
10. $\dfrac{2ab}{c}\sqrt{2}$.
11. $\dfrac{xy}{x-y}$.

Págs. 213 - 214

2. 5; $4ab$
3. 5; 7; 6.
4. b; $y\sqrt{x}$.
5. $2x-3y\sqrt{5}$.
6. 2.
7. 3; $2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$.
8. 2.
9. 28.
10. 8.
11. $\dfrac{a}{x}\sqrt[5]{y}+\dfrac{b}{x}$.

Págs. 216 - 219

5. $\frac{1}{6}$; $\frac{17}{8}$.
7. 0.
8. $2a^3+6ab^2$; $\frac{1}{80}$.
10. $(x-y)^2$; $(a-b)^3$.
11. a^2; b^3.
12. x^2 a^1.
13. a^3.
16. 49; $\frac{1}{64}$; $\frac{1}{7}$
17. 4; 3; 2.
18. 5.

19. -6.
20. 7^4+4^3.
23. $\sqrt[12]{a}$; $\sqrt[8]{x^7}$; $\frac{1}{2}$.
24. $\sqrt[20]{\frac{1}{a}}$; $\sqrt[45]{x^4}$; 3.
25. $\sqrt[60]{\frac{7}{3}}$; $\sqrt[6]{6}$.
26. $a^6\sqrt[15]{a^{14}}$; $\frac{1}{4}$.
27. $5a-6b$.
29. $\sqrt[5]{a^2}$; $\sqrt[4]{a}$; $\sqrt[4]{p^2}$
30. x^2; a^2.
31. $10a^2\sqrt{a}$.
32. $2\sqrt[3]{a^2}$.

Pág. 220

3. 4; $\frac{4}{9}$; $\frac{2}{3}$.
4. $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt{5}$; $\frac{c}{2}\sqrt[3]{7ab^2c}$.
5. 0.
6. 0.
7. $\sqrt[12]{a^7}$.
8. $x\sqrt[6]{x}$.
9. $\sqrt[60]{7}$.
10. $\sqrt[6]{x}-\sqrt[4]{x}$.
11. $\sqrt[6]{135}$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[x]{a}$.
12. $\sqrt[12]{4375}$; $\sqrt[16]{2^{15}}$.

Pág. 224

4. 0.
5. $2\frac{1}{2}$.
7. $26i$; $51i$.
8. $4i$; $6ai$.
9. $-5i\sqrt{3}$; $7i$.
10. $51i$.
11. $2i$.
12. ai.
13. 2.
14. $-i$; i; -1; 1; $-i$.
15. $-\frac{1}{8}$.
16. -13.

Págs. 229 - 230

12. 5,831. . .; 16,673. . .; 38,756. . .
16. 0,054; 0,991; 0,126.
19. $5\frac{2}{3}$; $5\frac{1}{16}$; 35.
20. 6,123. 0,951. . .
24. $3x^4-5x+7$.
25. $8a^2+9ab-5b^2$.
26. $\frac{3}{4}x^2y+\frac{4}{5}x-\frac{32}{75y}+$
27. $\frac{3}{4}a-\frac{5}{3}b+\frac{3}{5}c$.

Págs. 231 - 234

2. 49; 225.
4. 12; 324.
5. 24; sin sol.
6. -1; $\frac{17}{4}$.
7. 3.
8. 7.
9. 2.
10. 9.
11. 25.
12. 81.
13. 9.
14. 9; 50.
15. 1; 49.
16. $5+2\sqrt{6}$.
17. 6.
18. 3.
19. ab.
20. 7; 3.
21. 5; 1.
22. 5.
23. 23.
24. 100; 4.
25. 81.
26. 25.
27. 16.
28. $\frac{1}{4}$.
29. 6.
30. 5.
31. 3.
32. 13.
33. 3.
34. 11.
35. a.
36. $\frac{2}{3}$.
37. 16.
38. 9.
39. 31.
40. 17.
41. 13.
42. 10.
43. 5.
44. 10.
45. 12.

Págs. 235 - 236

3. 1; 2.
6. 4; -3.
7. 3.
8. 24.
9. 6; $\frac{1}{3}$.
10. 2.
12. -2; -3; -2.
13. $-1\frac{1}{2}$; -3; $-2\frac{1}{2}$.
14. -3; $\frac{2}{3}$.
15. $\frac{8}{5}$; $\frac{8}{3}$; 3.
16. 14; 4.
17. 9; -5.
18. $-\frac{13}{5}$; $-\frac{1}{8}$.
19. $\frac{41}{4}$.
20. 10.
21. -7.
22. 7.
23. $\frac{11}{15}$.
24. 0,3.

CAPITULO XII

Págs. 243 - 246

5. $\pm c\sqrt{3}$; $\pm 19i$; $\pm 14i\sqrt{a}$.
10. ± 16.
11. $\pm(a-5b)$.

12. $\pm(\frac{2}{3}m+\frac{3}{4}n)$.
13. ± 7.
15. ± 4.
16. ± 4.
17. ± 4.
18. ± 6.
20. ± 4; $\pm \frac{2}{3}$.
21. ± 6.
22. ± 1; ± 1.
23. $\pm 2i$.
24. ± 4.
25. ± 13; ± 1.
26. $\sqrt{\frac{S}{\pi}}$
27. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$
30. $\pm 2p\sqrt{\frac{2p}{h}}$
31. $+5$.
32. ± 12.
33. $+5$.
34. ± 5.
35. $+6$.
36. ± 3.
37. $+5$.
39. ± 7.
40. 28 y 35, —28 y —35.
41. ± 48.
42. ± 60.
43. 4, 6 y 8; —4, —6 y —8.
44. ± 10, ± 11 y ± 12.
45. 24 y 54 m.
46. 12 m.
47. $7\sqrt{3}$ m.
48. 10 m.
49. 12 m.
50. 42 m.
51. 36 m.
52. 72 cm.
53. 96 cm.
54. 10 cm.

Págs. 248 - 250

5. 0, b—a.
6. 0, 5.
7. 0, 6.
8. 0, — $\frac{10}{3}$.
9. 0, 8.
10. 0, 2.
11. 0, 8.
12. 0, 12.
13. 0, 5.
14. 12.
15. 0, 4.
16. 0, $\frac{2}{3}$.
17. 0, $\frac{9}{7}$.
18. 0, $\frac{25}{11}$.
19. 0, 7.
20. Sin solución.
21. 0.
22. 2.
23. 3.
24. 3, 4 y 5.
25. 6 cm.
26. 3,6 cm.

Págs. 256 - 257

1. 8, 10
3. 12, —8.
5. 4, 13.
7. 15, —8.
9. 19, —4.
11. 2, — $\frac{1}{2}$.
13. $\frac{2}{3}$, — $\frac{4}{3}$.
15. 6, — $\frac{13}{3}$.
17. $\frac{25}{9}$, — $\frac{3}{5}$.
18. 4, —4,6.
19. 2a, —6a.
21. 2a—3b, 3b.
22. —9b, 8a+9b.
23. 5a, 7b.
25. 5, —2.
26. 4, —6.
27. 5.
28. 2, 9.
29. 22,—1.
30. 3, 27.
31. 4, —13.
32. 3, —11.
33. 3, 5.
34. —3, 6.
35. 4.
36. 1, —4.
37. —6, —9.
38. 3, 11.
39. —6, 13.
40. 3, 7.
41. 2, —3.
42. 1, —4.
43. 3, 5.
44. 3, —2.
45. 1, 2.
46. 1, 6.
47. 6, 16.
48. 3, 10.
49. 2.
50. 5, 10.
51. 8.
52. 16.
53. 3, 4.
54. 3, 7.
55. 2.
56. 1, 2.
57. 5.
58. 2, 10.
59. 8, —9.
60. 9, —4.

Págs. 259 - 264

1. $\frac{3}{4}$, —2.
3. $\frac{1}{6}$, —1.
5. $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$.
11. 1, $\frac{9}{7}$.
15. 5, — $\frac{23}{8}$.
17. — $\frac{a}{b}$, $\frac{2b}{a}$
18. — $\frac{a}{b}$, — $\frac{c}{d}$.

19. $\frac{b^2}{2}, -\frac{ab}{2}$.
20. $-(a+b)\pm\sqrt{ab}$.
21. $1, -\frac{a+5b}{2a+3b}$.
22. $5, -\frac{11}{3}$.
24. $2, \frac{17}{6}$.
25. $2, -\frac{2}{9}$.
26. $6, \frac{23}{6}$.
27. 3, 5.
28. 1, —1,6.
29. $4, -\frac{5}{6}$.
30. 4, —1,8.
31. $1, \frac{7}{4}$.
32. $1, -\frac{3}{5}$.
35. $9, \frac{5}{9}$.
36. $\frac{1}{2}, -5$.
37. $\frac{3}{2}$.
38. $3, \frac{1}{2}$.
39. $2, \frac{23}{51}$.
40. $3, -\frac{1}{3}$.
41. $9, \frac{11}{3}$.
42. $10, -\frac{9}{2}$.
43. $4, \frac{13}{4}$.
44. $3, -\frac{1}{4}$.
45. $\pm 2i\sqrt{41}$.
46. $4, \frac{13}{9}$.
47. $\frac{-11\pm\sqrt{10969}}{12}$.
48. $\frac{-13\pm\sqrt{271}}{3}$.
49. 2, 3.
50. $2, \frac{9}{2}$.
51. $5, \frac{2}{11}$.
52. 4.
53. $7, \frac{79}{9}$.
54. 3, —7.
55. $6, -\frac{23}{4}$.
56. 2.
57. 7.
58. 5.
59. 4.
60. $\pm 1, \pm 4$.
61. $\pm 3, \pm\sqrt{14}$.
62. $\pm\frac{1}{2}, \pm i\sqrt{\frac{3}{2}}$.
63. $\pm 2, \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$.
64. $\pm i, \pm 3\sqrt{3}$.
65. $\pm\sqrt{\frac{17\pm\sqrt{514}}{15}}$.
66. $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \pm i\sqrt{\frac{7}{3}}$.
67. $\pm\frac{1}{2}$.
68. 1, 5.
69. $\pm 3, \pm\sqrt{14}$.
70. $\frac{a+2b}{2}, \frac{a-b}{2}$.
71. $\pm 2. \pm 6$.
72. 4.
73. 12.
74. $\frac{1}{3}$.
75. 16.
76. 8.
77. —1.
78. 12.
79. 66.
80. 8.
81. 9, —1.

82. $2, -\frac{22}{7}$.
83. $\frac{1}{8}, (-\frac{7}{2})^3$.
84. $\pm 4\sqrt{2}, \pm i\sqrt{(\frac{1}{3})^5}$.
85. $\pm\frac{1}{4}, \pm 1$.
86. 4, 9.
87. $\pm\sqrt{7}$.
88. $\pm 2, \pm\frac{4i\sqrt{3}}{3}$.
89. $1, -\frac{1}{2}, 1\pm\sqrt{3}$.
90. 1, 4.
91. 1, 16.

Págs. 267 - 268

5. $x^2-4x-1=0$
6. $x^2-10x+34=0$
9. $24x^2-34x-45=0$
10. $(x-11)(x-4)$.
15. $(x-2{,}5)(x-5{,}2)$.
16. $(5x+4)(x-3)$.
18. $(5x-19-\sqrt{481})\left(x-\frac{19}{5}+\frac{\sqrt{481}}{5}\right)$.
19. $(9x-5)(x-3)$.

Págs. 271 - 276

1. 50, ó —20.
2. 36 y 84.
3. 41 y 59.
4. 20 años.
5. 3, ó —17*.
6. $\frac{7}{8}$, ó $\frac{-2}{-1}$.
7. 84.
8. 1 112.
9. 15 y 20 m.
10. 15 y 20 m, ó $5\sqrt{21}$ y 10 m.
11. 16 m.
12. 20, 21 y 29 m.
13. 12, 16 y 20 m.
14. 5, 12 y 13 m.
15. 14 y 16 m.
16. 11 y 49 cm.
17. 11 y 60 cm.
18. 126 cm.
19. 24 cm, ó 40 cm.
20. 11 cm.
21. E° 80,00.
22. 20, 23 y 29 al.
23. 36 y 30 s.
24. 12 pers.
25. 13 y 15, —13 y —15.
26. 27 y 54 ds.
27. 4 pers.
28. E° 240.
29. 15 y 10 sems.
30. 63.
31. 69.
32. 45 y 75 cm.
33. b = 43 cm, h = [illegible]4 cm.

* Interpretando en forma amplia el término «[illegible]», —17 también es solución

34. 10 m.
35. 12,5 kg y 30 kg.
36. E° 2,20.
37. 170 kg.
38. $\approx$4,05 seg.
39. $2\frac{1}{2}$ h.
40. 175 sold.

CAPITULO XIII

Pág. 279

1. $x_1=6,\ y_1=4.$
   $x_2=4,\ y_2=6.$

2. $x_1=1,\ y_1=2.$
   $x_2=0{,}4,\ y_2=2{,}2.$

3. $x_1=5,\ y_1=1.$
   $x_2=\frac{1}{3},\ y_2=-1\frac{1}{3}.$

4. $x_1=9,\ y_1=1.$
   $x_2=1,\ y_2=9.$
   $x_3=-9,\ y_3=-1.$
   $x_4=-1,\ y_4=-9.$

5. $x_1=1,\ y_1=3.$
   $x_2=3,\ y_2=1.$

6. $x_1=10,\ y_1=1.$
   $x_2=-1,\ y_2=-10.$

7. $x_1=9,\ y_1=5.$
   $x_2=5,\ y_2=9.$
   $x_3=-9,\ y_3=-5.$
   $x_4=-5,\ y_4=-9.$

8. $x=9,\ y=1.$

9. $x=4,\ y=1.$

10. $x_1=4,\ y_1=1.$
    $x_2=-1,\ y_2=-4$

11. $x=1,\ y=1.$

12. $x_1=5,\ y_1=4.$
    $x_2=-4,\ y_2=-5.$

13. $x_1=0,\ y_1=4.$
    $x_2=4,\ y_2=0.$

14. $x_1=9,\ y_1=6,$
    $x_2=-9,\ y_2=-6.$

EJERCICIOS DE RECAPITULACION V AÑO

Págs. 279 - 285

1. $\frac{2}{3}ab^2.$
2. $\frac{8b^3}{a^{\frac{3}{2}}}.$
3. $b^{4y-2x}.$
4. $a^{10}b^4.$
5. $b\sqrt{a}.$
6. $\frac{1}{b^2}.$
7. $\frac{1}{b}.$
8. $\sqrt{b\sqrt[3]{a}}.$
9. $a^{2(m^2+n^2)}.$
10. $a^y(a^x+1).$
11. $m^b.$
12. $5.$
13. $a-b.$
14. $a^3+8a^{\frac{3}{2}}+15.$
15. $a+b-c+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}.$
16. x^2+xy+y^2
17. $a+b.$
18. $x^{\frac{1}{5}}+2.$
19. $x^{\frac{1}{5}}\ \ 1.$
20. $3x^{\frac{1}{2}}+2.$
21. $(a^{\frac{1}{3}}+5)(a^{\frac{1}{3}}-4).$
22. $x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y.$
23. $9x^{\frac{2}{3}}+9x^{\frac{1}{3}}+5.$
24. $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}$
25. $a\ \ b^{\frac{1}{2}}.$
26. $3^n-2^n.$
28. $-\frac{\sqrt{13}}{6}.$
29. $\frac{a+b}{a-b}.$
30. $24\sqrt{3}+5.$
31. $\frac{(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}.$
32. $\sqrt{2\sqrt{6}}.$
33. $4+\sqrt{15}.$
34. Son iguales.
36. $-\sqrt[6]{2}.$
37. $\sqrt[48]{\frac{b^{11}}{a^{14}}}.$
38. 0,129.
39. a.
40. $\pm 5.$
41. Sin solución.
42. $\frac{1}{9}$
43. 8; —7; 3; —2.
44. 5; 1; $3\pm2\sqrt{3}.$
45. 1
46. 5; —1; $2\pm2i.$
47. $\frac{1}{4};\ -\frac{1}{2}.$
48. $\pm\frac{1}{3};\ \pm1.$

49. $-1;\ -\frac{1}{32}$.
50. 3"; 2".
51. 0.
52. 0; 2.
53. 1.
54. 7.
55. -1; 1.
56. $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.
57. $-1;\ -\frac{28}{17}$.
58. a; b.
59. $-1;\ \frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})$.
62. 3.
66. 5.
67. 4; 1.
69. a) 0; b) 1; c) 2.
70. 3, $\frac{8}{7}$.
71. 7.
72. $-\frac{b}{c}$.
73. $\frac{b^2-2ac}{c^2}$.
74. $\frac{b^2-4ac}{a^2}$.
75. $\frac{b(3ac-b^2)}{a^2c}$.
76. $\frac{a^2+c^2}{ac}+2$.
77. $\frac{b^2(b^2-4ac)}{a^2c^2}$.
78. $\frac{-bc}{a^2}$.
79. $\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^4}$.
80. $\frac{3abc-b^3}{a^3}$.
81. $x^2-2ax+4b=0$.
82. $x^2-(a+2)x+a+b+1=0$
83. $4x^2-2ax+b=0$.
84. $x^2-(a-4)x-2a+b+4=0$
85. $x^2-(a^2-2b)x+b^2=0$.
86. $x^2-4ax+3a^2+4b=0$.

CAPITULO XIV

Págs. 295 - 296

1. $x=2,\ y=3$.
2. $x=3,\ y=6$.
3. $x=\frac{1}{3},\ y=\frac{1}{6}$.
4. $x=3,\ y=5$.
5. $x=6,\ y=5$.
6. $x=6,\ y=3$.
7. $x=49,\ y=9$.
8. $x=9,\ y=4$.
9. $x=16,\ y=5$.
10. $x=11,\ y=9$.

Pág. 297

1. $x=1{,}2\ \ y=4{,}8$.
2. $x=4,\ y=6$.
3. $x=-\frac{1}{5},\ y=-\frac{1}{3}$.
4. $x=33,\ y=22$.
5. $x=10,\ y=15$.
6. $x=12,\ y=28$.
7. $x=16,\ y=4$.
8. $x=64,\ y=6$.
9. $x=35,\ y=14$.
10. $x=14,\ y=46$.

Págs. 299 - 312

1. $x=6,\ y=7$.
3. $x=15,\ y=12$.
5. $x=5,\ y=\frac{7}{3}$.
7. $x=2,\ x=1$.
9. $x=2,\ y=1$
11. $x=4,\ y=1$.
13. $x=2,\ y=1$.
14. $x=\frac{83}{91},\ y=\frac{10}{13}$.
15. $x=1{,}1,\ y=1{,}2$.
16. $x=3{,}5,\ y=4{,}5$.

17. $x = \frac{464}{75}$, $y = \frac{306}{25}$.
18. $x = -2$, $y = 3$.
19. $x = 3$, $y = 5$.
20. $x = 1$, $y = 2$.
21. $x = 8$, $y = 2$.
22. $x = 4$, $y = 7$.
23. $x = 3$, $y = 2$.
24. $x = 6$, $y = 4$.
25. $x = 7$, $y = 5$.
26. $x = 3$, $y = 1$.
27. $x = 12$, $y = 7$.
28. $x = 5$, $y = 6$.
29. $x = 2$, $y = 3$.
30. $x = 3$, $y = 1$.
31. $x = -3$, $y = -4$.
32. $x = 7$, $y = 4$.
33. $x = 12$, $y = 15$.
34. $x = 12$, $y = 8$.
35. $x = 18$, $y = 12$.
36. $x = -36$, $y = -72$.
37. $x = 12$, $y = 20$.
38. $x = 24$, $y = 30$.
39. $x = 8$, $y = 6$.
40. $x = 7$, $y = 9$.
41. $x = 19$, $y = 11$.
42. $x = 6$, $y = 6$.
43. $x = 5$, $y = 2$.
44. $x = 11$, $y = 1$.
45. $x = 3$, $y = 1$.
46. $x = 7$, $y = 3$.
47. $x = -\dfrac{3464}{1457}$, $y = \dfrac{5577}{2914}$.
48. $x = 15$, $y = 17$.
49. $x = -\frac{19}{7}$, $y = -\frac{15}{7}$.
50. $x = -\frac{2385}{87}$, $y = -\frac{541}{87}$.
51. $x = 13$, $y = 17$.
52. $x = 23$, $y = 19$.
53. $x' = 0$, $y' = 0$; $x'' = 6$, $y'' = 4$.
54. $x' = 0$, $y' = 0$; $x'' = \frac{13}{8}$, $y'' = \frac{13}{5}$.
55. $x = 7$, $y = 3$.
56. $x = 5$, $y = 3$.
57. $x = 5$, $y = 4$.
58. Sin solución.
59. $x = 10$, $y = 6$.
60. $x = 8$, $y = 28$.
61. $x = 9$, $y = 6$.
62. $x = 5$, $y = 1$.
63. $x = 10$, $y = 7$.
64. $x = 3$, $y = 4$.
65. $x = 3$, $y = 4$.
66. $x = 5$, $y = 7$.
67. $x = 3$, $y = 6$.
68. $x = 6$, $y = 5$.
69. $x = 11$, $y = 13$.
70. $x = 7a$, $y = 3b$.
71. $x = \dfrac{p+q}{a+b}$, $y = \dfrac{pb-aq}{a+b}$
72. $x = 4a-3b$, $y = 3a-4b$
73. $x = a+2b$, $y = a-2b$.
74. $x = b$, $y = a$.

75. $x = m$, $y = n$.
76. $x = a$, $y = b$
77. $x = a(a+b)$, $y = b(a+b)$.
78. $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$.
79. $x = \frac{1}{b}$, $y = \frac{1}{a}$.
80. $x = \dfrac{a+b}{a-b}$, $y = \dfrac{a-b}{a+b}$
81. $x = a+b$, $y = a-b$.
82. $x = \dfrac{(a-b)^2+ab}{ab}$,

    $y = \dfrac{ab-(a-b)^2}{b^2}$.
83. $x = \dfrac{1}{b-1}$,

    $y = \dfrac{1}{(a+1)(b-1)}$.
84. $x = \dfrac{a}{a-b}$, $y = \dfrac{b}{a+b}$,
85. $x = a-b$, $y = a+b$.
86. $x = \dfrac{2a^2+ab+b^2}{2a(a^2-b^2)}$,

    $y = \dfrac{b}{2a(a-b)}$.
87. $x = \dfrac{1+ab}{a+b^2}$, $y = \dfrac{1+ab}{b-a^2}$
88. $x = \dfrac{2}{a+1}$,

    $y = \dfrac{2(a-b)}{a(a-1)-b(a+1)}$
89. $x = 13$, $y = 15$, $z = 17$.
90. $x = 15$, $y = 8$, $z = 12$.
91. $x = 28$, $y = 20$, $z = 12$
92. $x = 5$, $y = 3$, $z = 1$.
93. $x = 7$, $y = 4$, $z = 3$.
94. $x = 7$, $v = 5$, $z = 3$.
95. $x = 10$, $y = 8$, $z = 6$.
96. $x = 15$, $y = 10$, $z = 8$.
97. $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{4}$, $z = \frac{1}{5}$.
98. $x = 12$, $y = 8$, $z = 6$.
99. $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = \frac{1}{2}$.
100. $x = 5$, $y = 7$, $z = 9$.
101. $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = \frac{1}{4}$.
102. $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.
103. $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$.
104. $x = 17$, $y = 15$, $z = 12$.
105. $x = 25$, $y = 2$, $z = 11$
106. $x = 12$, $y = 13$, $z = 14$
107. $x = 60$, $y = 30$, $z = 10$
108. $x = 8$, $y = 12$, $z = 10$.
109. $x = 18$, $y = 24$, $z = 30$.
110. $x = 10$, $y = 15$, $z = 18$.
111. $x = 5$, $y = 4$, $z = 3$.
112. $x = 6$, $y = 4$, $z = 2$.
113. $x = 10$; $y = 8$, $z = 3$.
114. $x = 2$, $y = 3$, $z = 1$.
115. $x = 5$, $y = 6$, $z = 7$.
116. $x = 5$, $y = 3$, $z = 1$.
117. $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{4}$, $z = \frac{1}{5}$.
118. $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = \frac{1}{4}$.
119. $x = 10$, $y = 8$, $z = 6$.
120. $x = 12$, $y = 20$, $z = 18$
121. $x = 12$, $y = 10$, $z = 6$.
122. $x = 8$, $y = 8$, $z = 12$

Págs. 312 - 320

1. 24 y 40.
2. 17 y 15.
3. 30 y 3.
4. 17 y 23.
5. 20 y 12
6. 25 y 15.
7. 89 y 27.
8. 18 y 25.
9. 155 y 24.
10. 17 y 10.
11. 6 y 15.
12. 15 y 45 años.
13. 13 y 19 años.
14. 7, 11 y 42 años.
15. E° 2,40 y E° 3,60.
16. E° 4,50 y E° 5,40.
17. E° 0,88 y E° 0,82.
18. E° 1 y E° 0,80.
19. E° 1,20 y E° 0,90.
20. E° 840 y E° 576.
21. E° 15.
22. E° 18 000 y E° 15 000.
23. 720 kg y 512 kg.
24. Oro: 361 gr, plata: 231gr.
25. 16 y 4
26. 18.
27. 46.
28. 81 y 18.
29. 78.
30. E° 14 y E° 6.
31. E° 4 000 y E° 6 000.
32. 6% y 5%.
33. 25 l y 30 l.
34. 20 l y 22 l.
35. 1.°: 37,5 min, 2.°: 30 min.
36. 720 l. 30 min y 36 min.
37. $V_v = 17{,}5 \left[\frac{km}{h}\right]$,
$V_a = 3{,}5 \left[\frac{km}{h}\right]$.
38. $9\left[\frac{m}{seg}\right]$ y $5\left[\frac{m}{seg}\right]$.
39. 5 y 4,5.
40. E° 8 000 y E° 6 000.
41. E° 3 000 y E° 2 000.
42. E° 15 000 y el 4½%.
43. E° 4 000 y E° 5 000.
44. b = 12m, h = 5 m.
45. $\alpha = 90°$, $\beta = 50°$, $\gamma = 40°$.
46. b = 30 m, h = 16 m.
47. 40 m y 9 m.
48. 24 m y 7 m.
49. AB = 32,5 km, BC =
= 43 km, AC = 38,5 km.
50. 1,8 m, 3 m y 4,3 m.
51. E° 1,20; E° 0,90; E° 0,60.
52. E° 4,50; E° 2,00; E° 1,00.
53. $\alpha = 80°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 40°$.
54. 48 cm, 36 cm y 30 cm.
55. 1.°: E° 70 650, 2.°:
E° 68 250, 3.°: E° 90 300.
56. 1.°: E° 720, 2.°: E° 840,
3.°: E° 945.
57. 5 : 10 = 8 : 16; [illegible] :
: $-$[illegible] = $-\frac{18}{[illegible]}$: [illegible].
58. 415.

CAPITULO XV

Págs. 323 - 325

1. $x_1 = 15$, $y_1 = 12$;
$x_2 = 12$, $y_2 = 15$.
2. $x_1 = 10, y_1 = 8$;
$x_2 = 8$, $y_2 = 10$.
3. $x_1 = 14$, $y_1 = 5$;
$x_2 = -5$, $y_2 = -14$.
4. $x_1 = 8$, $y_1 = 5$;
$x_2 = 5$, $y_2 = 8$.
5. $x_1 = 12$, $y_1 = 6$;
$x_2 = -6$, $y_2 = -12$.
6. $x_1 = 6$, $y_1 = 4$;
$x_2 = 4$, $y_2 = 6$;
$x_3 = -4$, $y_3 = -6$;
$x_4 = -6$, $y_4 = -4$.
7. $x_1 = 6$, $y_1 = 5$;
$x_2 = 5$, $y_2 = 6$;
$x_3 = -5$, $y_3 = -6$;
$x_4 = -6$, $y_4 = -5$.
8. $x_1 = 7$, $y_1 = 2$;
$x_2 = 2$, $y_2 = 7$.
9. $x_1 = 8$, $y_1 = 5$;
$x_2 = 5$, $y_2 = 8$;
$x_3 = -5$, $y_3 = -8$;
$x_4 = -8$, $y_4 = -5$.
10. $x_1 = 12$, $y_1 = 8$;
$x_2 = -8$, $y_2 = -12$
11. $x_1 = 10$, $y_1 = 6$;
$x_2 = 6$, $y_2 = 10$;
12. $x_1 = 20$, $y_1 = 5$;
$x_2 = 5$, $y_2 = 20$;
$x_3 = -5$, $y_3 = -20$;
$x_4 = -20$, $y_4 = -5$.
13. $x = \pm 18$, $y = \pm 14$.
14. $x_1 = 7$, $y_1 = 5$;
$x_2 = 5$, $y_2 = 7$;
$x_3 = -5$, $y_3 = -7$;
$x_4 = -7$, $y_4 = -5$.
15. $x_1 = 28$, $y_1 = 12$;
$x_2 = -28$, $y_2 = -12$.
16. $x_1 = 9$, $y_1 = 5$;
$x_2 = 5$, $y_2 = 9$;
$x_3 = -5$, $y_3 = -9$;
$x_4 = -9$, $y_4 = -5$.
17. $x_1 = 11$, $y_1 = 4$;
$x_2 = 4$, $y_2 = 11$;
$x_3 = -4$, $y_3 = -11$;
$x_4 = -11$, $y_4 = -4$.
18. $x_1 = 10$, $y_1 = 2$;
$x_2 = -6$, $y_2 = -\frac{10}{3}$.
19. $x_1 = 17$, $y_1 = 13$;
$x_2 = 13$, $y_2 = 17$;
$x_3 = -13$, $y_3 = -17$;
$x_4 = -17$, $y_4 = -13$.
20. $x_1 = 7$, $y_1 = 5$;
$x_2 = -7$, $y_2 = -5$.
21. $x_1 = 9$, $y_1 = 4$;
$x_2 = -9$, $y_2 = -5$.

22. $x=15, \quad y=12.$

23. $x_1=15, \quad y_1=12;$
$x_2=-15, \quad y_2=-12.$

24. $x_1=12, \quad y_1=10;$
$x_2=-12, \quad y_2=-10.$

25. $x_1=13, \quad y_1=11;$
$x_2=11, \quad y_2=13;$
$x_3=-11, \quad y_3=-13;$
$x_4=-13, \quad y_4=-11.$

26. $x_1=6, \quad y_1=4;$
$x_2=4, \quad y_2=6;$

$$x_3=\frac{-11+i\sqrt{59}}{2}, \quad y_3=\frac{-11-i\sqrt{59}}{2};$$

$$x_4=\frac{-11-i\sqrt{59}}{2}, \quad y_4=\frac{-11+i\sqrt{59}}{2}.$$

27. $x_1=12, \quad y_1=7;$
$x_2=7, \quad y_2=12;$
$x_3=-7, \quad y_3=-12;$
$x_4=-12, \quad y_4=-7.$

28. $x=\pm 3, \quad y=\pm 2.$

29. $x_1=9, \quad y_1=5;$
$x_2=-5, \quad y_2=-9;$

$$x_3=\frac{-1+\sqrt{181}}{2}, \quad y_3=\frac{1+\sqrt{181}}{2};$$

$$x_4=\frac{-1-\sqrt{181}}{2}, \quad y_4=\frac{1-\sqrt{181}}{2}.$$

30. $x_1=6, \quad y_1=8;$
$x_2=-6, \quad y_2=-8.$

31. $x_1=9, \quad y_1=3;$
$x_2=\frac{9}{2}(-1+i\sqrt{3}), \quad y_2=\frac{3}{2}(-1+i\sqrt{3});$
$x_3=\frac{9}{2}(-1-i\sqrt{3}), \quad y_3=\frac{3}{2}(-1-i\sqrt{3}).$

Págs. 325 - 327

1. 10 y 20.
2. 20 y 12.
3. 8 y 15 m.
4. 3 y 28 m.
5. 12 y 35 m.
6. p y q, 9 y 16 m; a y b 15 y 20 m.
7. 15 y 25 m.
8. 60 y 80 m.
9. 10 y 24 m.

10. 36 y 64 m.
11. base 30 cm, lado 25 cm.
12. base 10 m, lado 15 m.
13. $b=1{,}2$ m, $h=11$ cm.
14. 14 y 48 cm.
15. 6, 8 y 10 m.
16. 12 personas y E° 70, o 21 personas y E° 40.
17. 5%, 4 años.
18. 12 y 15.
19. 12 y 20 cm.

EJERCICIOS DE RECAPITULACION FINAL

Págs. 341 - 359

1. 11.15 horas.
2. 2.ª clase.
3. 7.03 km.
4. $3{,}51 \frac{kg}{cm^2}$; 3,39 atm.
5. 0,2777 há.
6. 17,45 kg.
7. 3,66 m por 4,57 m.
8. $\frac{109}{60} \approx 1{,}8.$
9. 11 kg. de oro.
10. $29^g{,}25$; $129^g{,}25$.
11. 3h 32 min. $43\frac{7}{11}$ seg.
12. $13{,}5\,\pi$ km.
13. $\frac{31}{6}.$
14. $6\frac{49}{99}$
15. $\frac{730}{343}.$
16. 1.500.000.
17. $-1{,}455.$
18. 0,87 . . . (87).
19. 3.
20. $-\frac{4}{11}$
21. 1.
22. 9.
23. 1.
24. 8.
25. $x+2=\frac{4}{1-y}$; $x-2=\frac{4y}{1-y}$.
26. a) $\frac{65}{288}$. b) Se hace 0.
29. $e=\frac{u+1}{u-1}$; $e+e^{-1}=\frac{2(u^2+1)}{u^2-1}$
30. $\pm\sqrt{\frac{2}{31}}$
31. $\frac{(e-b)c+(f-d)a}{b+d-e-f}.$
32. $m+3n.$
33. $\frac{a+b+c}{3}$
34. $\frac{1-t+t^2}{1+t+t^2}.$
35. 20; 0.
36. $a-b.$
37. $\frac{xyz}{x^2-xy+y^2}$
38. $\frac{1}{a-b}$
39. 2.
40. $\frac{4a^4}{(6+a)^2}$
41. 0,284.

42. 1,18; —0,43.

43. —2,28; — 0,219.

44. $\frac{9}{4}$.

45. a) $0{,}04a^{6}b^{2}+0{,}2a^{-2}b^{-2}+0{,}25a^{2}b^{-6}$.

b) $a^{n}-a^{-\frac{n}{2}}+\frac{1}{4}a^{-2n}$.

46. $a=4b^{2}c$.

47. $-\frac{7}{20}$

48. $\frac{1}{a^{2}}$.

49. $2\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+3$.

50. 0.

51. 0,17678.

52. 0.

53. $x=\frac{1}{2}$; $y=\frac{1}{2}$.

54. $a=3$; $b=2$.

55. a) $1+\sqrt{3}$; b) $1+\sqrt{2}$; c) $2-\sqrt{3}$; d) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; e) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$; f) $4+\sqrt{5}$.

56. $a^{-2}-a^{-1}+2$.

57. $(a^{2}+ab+b^{2})(a^{2}-ab+b^{2})$.

a) $(1+a+a^{2})(1-a+a^{2})$; b) $x+\sqrt{xy}+y)(x-\sqrt{xy}+y)$.

58. $a=2$; $b=-1$.

59. 2.

60. $A=4a^{3}-9a^{2}+3a+2$.

61. —20.

62. $a=10$; $b=11$. Cuociente $=x^{2}-3x+2$.

63. $A \cdot B+f^{2}=0$.

64. I es ecuación de 1.^{er} grado

II es falsa igualdad.

III es identidad.

65. $a=2$; $x=\frac{7}{11}$.

66. $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1\pm i)$; $\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$.

67. $x=\frac{br-cq}{cp-ar}$; a) $x=0$;

b) $x=\infty$

68. $x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4(a+b)}}{2(a+b)}$.

69. a) 1; $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. b) -1; $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

70. Una solución, $x=26$.

71. $a^{2}z^{2}+(a^{2}-2a-1)z+a^{3}=0$

$a'=\frac{2}{3}$; $a''=-\frac{2}{7}$.

72. $p=-14$; $q=\frac{5}{2}$.

73. $m=-2(a+b)$; $n=2ab$.

74. a) $0<c<\frac{9}{20}$

b) $c<0$

c) $c=0$

d) $c=\frac{9}{20}$.

e) $c>\frac{9}{20}$.

75. 166.

76. $a^{2}x^{2}+a(b-c)x-bc=0$.

77. $9x^{2}-36x+37=0$.

$18x^{3}-81x^{2}+110x-37=0$.

78. 1; 3.

79. 0; $\pm 1\,024$; $=243$.

80. $\frac{25}{13}$.

81. 50.

82. $\frac{3}{16}$

83. 4 h 10 min.

84. 80.

85. E del 1.° es 3 E del 2.°.

86. a) 250 kg. b) 10 kg.

96. $a:b:c=3:(-1):11$.

97. $\frac{5}{6}$; $-\frac{3}{5}$.

98. $x:y:z=5:(-1):7$.

99. a) $x:y:z=3:5:4$. b) $x=6$; $y=10$; $z=8$.

108. $x=c$; $y=d$.

109. $x=\frac{dp-bq}{ad-bc}$, $y=\frac{bc-ad}{cp-aq}$.

110. $x=\frac{2(a-b)}{a}$, $y=\frac{b}{3(a+b)}$

111. $x=\frac{10}{9}$, $y=\frac{22}{9}$, $z=\frac{7}{9}$.

112. $x=144$, $y=36$, $z=27$.

113. $x=\frac{5}{3}$, $y=\frac{3}{5}$.

114. $x=2$, $y=5$, $z=-1$.

115. $x=-(b+c)$, $y=-(a+c)$.

116. $x=0{,}05$, $y=0{,}04$.

117. $x=\frac{a+b}{ab}$, $y=\frac{a-b}{ab}$.

118. $x=0$, $y=2$, $z=4$, $u=10$.

119. $x=1$, $y=2$, $z=3$, $t=4$.

120. $x=3$, $y=6$; $z=3$, $u=10$, $v=15$.

121. $x^{2}-x+m-1=0$.

122. $x=\frac{1}{(a-c)(b-c)}$, $y=\frac{1}{(a-b)(b-c)}$, $z=\frac{1}{(a-b)(a-c)}$.

123. $a=3$, $x=y=17$.

126. $a^{3}+b^{3}+c^{3}-3abc=0$.

127. $p=2$, $q=3$.

128. $c_1=\pm 2$, $d_1=0$; $c_2=0$; $d_2=\pm 2$; $c_3=\frac{\pm 3}{2^{n}}$, $d_3=\frac{\pm 1}{2^{n}}$;

$c_4=\frac{\pm 1}{2^{n}}$, $d_4=\frac{\pm 3}{2^{n}}$.

129. $x_1=10$, $y_1=3$; $x_2=-12$, $y_2=-\frac{13}{3}$.

130. $x_1=2,\ y_1=1;\ x_2=1,\ y_2=2;\ x_3=1+i\sqrt{2},\ y_3=1-i\sqrt{2};$
$x_4=1-i\sqrt{2},\ y_4=1+i\sqrt{2}.$

131. $x=1,\ y=-1.$

132. $x_1=16,\ y_1=9;\ x^2=9,\ y_2=16.$

133. $x_1=4,\ y_1=2;$
$x_2=-2,\ y_2=-4;$
$x_3=\sqrt{14}-4,\ y_3=\sqrt{14}+4;$
$x_4=-\sqrt{14}-4,\ y_4=-\sqrt{14}+4.$

134. $x_1=6,\ y_1=1;$
$x_2=1,\ y_2=6;$
$$x_3=\frac{-7-\sqrt{73}}{2},\ y_3=\frac{-7+\sqrt{73}}{2};$$
$$x_4=\frac{-7+\sqrt{73}}{2},\ y_4=\frac{-7-\sqrt{73}}{2}.$$

35. $x_1=\frac{1}{5},\ y_1=5;$
$x_2=\frac{4}{5},\ y_2=20.$

136. $x_1=\frac{p}{q},\ y_1=\frac{q}{p};$
$$x_2=\frac{2p}{3q},\ y_2=\frac{6q}{p}.$$

137. $x_1=0,\ y_1=m;$
$x_2=m,\ y_2=0.$

138. $x=3,\ y=2.$

139. $x_1=6,\ y_1=-1;$
$x_2=-6;\ y_2=1.$
$$x_3=2\sqrt{\frac{115}{11}},\ y_3=\sqrt{\frac{115}{11}};$$
$$x_4=-2\sqrt{\frac{115}{11}},\ y_4=-\sqrt{\frac{115}{11}}.$$

140. $a^6-6a^4b+9a^2b^2-2b^3.$

141. $x=\frac{4}{5},\ y=\frac{5}{4}.$

142. $x_1=17,\ y_1=11;$
$x_2=-11,\ y_2=-17.$

143. $x_1=5,\ y_1=4;$
$x_2=4,\ y_2=5.$

144. $x_1=4,\ y_1=3;$
$x_2=3,\ y_2=4.$

145. $x_1=15,\ y_1=10;$
$x_2=-10,\ y_2=-15.$

146. $x_1=5,\ y_1=6;$
$x_2=6,\ y_2=5.$

147. $x_1=13,\ y_1=9;$
$x_2=-9,\ y_2=-13.$

148. $x_1=4,\ y_1=3;$
$x_2=3,\ y_2=4;$
$x_3=-3,\ y_3=-4;$
$x_4=-4,\ y_4=-3.$

149. $x_1=5,\ y_1=2;$
$x_2=2,\ y_2=5;$
$x_3=-2,\ y_3=-5;$
$x_4=-5,\ y_4=-2.$

150. $x_1=12,\ y_1=3;$
$x_2=3,\ y_2=12.$

151. $x_1=32,\ y_1=2;$
$x_2=2,\ y_2=32.$

152. $x_1=6,\ y_1=2;$
$x_2=-6,\ y_2=-2;$
$$x_3=\frac{-28\sqrt{3}}{9},\ y_3=\frac{22\sqrt{3}}{9};$$
$$x_4=\frac{28\sqrt{3}}{9},\ y_4=\frac{-22\sqrt{3}}{9}.$$

153. $x_1=1,\ y_1=-3;$
$x_2=-1,\ y_2=3;$
$x_3=2,\ y_3=-1;$
$x_4=-2,\ y_4=1.$

154. $x_1=5,\ y_1=4,\ z_1=2;$
$x_2=-5,\ y_2=-4,\ z_2=-2;$
$x_3=4i,\ y_3=-5i,\ z_3=18i;$
$x_4=-4i,\ y_4=5i,\ z_4=-18i.$

155. $x_1=\frac{4a}{\sqrt{29}},\ y_1=\frac{2a}{\sqrt{29}},\ z_1=\frac{3a}{\sqrt{29}};$
$x_2=\frac{-4a}{\sqrt{29}},\ y_2=\frac{-2a}{\sqrt{29}},\ z_2=\frac{-3a}{\sqrt{29}}.$

156. $x_1=10,\ y_1=5,\ z_1=1;$
$x_2=-5,\ y_2=-10,\ z_2=1.$

157. $x_1=9,\ y_1=4,\ z_1=6;$
$x_2=4,\ y_2=9,\ z_2=6.$

158. $x_1=4,\ y_1=3,\ z_1=5;$
$x_2=3,\ y_2=4,\ z_2=5;$
$x_3=\frac{17+i\sqrt{239}}{2},\ y_3=\frac{17-i\sqrt{239}}{2},\ z_3=-5;$
$x_4=\frac{17-i\sqrt{239}}{2},\ y_4=\frac{17+i\sqrt{239}}{2},\ z_4=-5.$

159. $x_1=2,\ y_1=3,\ z_1=5;$
$x_2=-2,\ y_2=-3,\ z_2=-5;$
$x_3=2i,\ y_3=3i,\ z_3=5i;$
$x_4=-2i,\ y_4=-3i,\ z_4=-5i.$

160. $x=1,\ y=2,\ z=3,\ u=4.$

161. $x_1=5,\ y_1=1,\ z_1=3;$
$x_2=-5,\ y_2=-1;\ z_2=-3.$

162. $x_1=5,\ y_1=2;\ z_1=7;$
$x_2=-5,\ y_2=-2;\ z_2=-7.$

163. $x_1=6,\ y_1=4,\ z_1=1;$
$x_2=-6,\ y_2=-4,\ z_2=-1.$

164. $x_1=6,\ y_1=4,\ z_1=1;$
$x_2=-8,\ y_2=-6,\ z_2=-3.$

CAPITULO XVII

Págs. 376 - 382

3. a) 1; 4; 6; —2; —5; —7

5. 64; 625; 243; 343; 6

6. 11; $\frac{2}{3}$; 4.

7. d) $\frac{1}{3}$; e) $\frac{2}{3}$.

8. $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{1}$

9. 5; 4; 5.

10. b.3) $\log 3+\log a+$
$+\,2\log b+\frac{1}{2}\log c$
$-(\log 4+\log x$
$+\log y).$

11. b) $\log\frac{ab}{c}$;

e) $\log\frac{a^2c}{\sqrt[4]{b}}$;

g) $\log\left(\frac{a}{b^4}\sqrt[5]{\frac{cx^3}{d^2}}\right)$;

h) $\log\left(a^5\sqrt[3]{b^2c}\sqrt{\frac{z}{xy^3}}\right)$.

14. 1; 2 ; 1; 0; 2; 3; 4; —1.
—2; —3; —4.

15. a) 3,68731;
c) 5,68731;
f) 0,68731;
g) 0,68731 — 1;
i) 0,68731 — 3.

16. 13; —1.

17. e) 0,92745—1; 0,47712;
f) 0,87866.

19. c 0,461003 —1;
0,705833;
0,879707;
2,962926.

21 c. 6,4604;
0,15697;
0,029387.
1,1753.

22. c) 2,71528;
d) 0,048449;
e) 21,2122 ; 0,30708;
f) 1,26082 ; 0,6789.

23. a) 0,2997;
b) 2,193;
c) 100,27; d) 1.

24. a) $95896 \cdot 10^{-11}$;
b) $452376 \cdot 10^{12}$;
c) 0,5147;
d) 19,0046.

25. a) 15,758;
b) 1,37376;
c) 27,9995;
d) 1,20333.

26. a) 3,86127; b) 1;
c) 0,91459.

Págs. 382 - 383

1. 4.
2. 5.
3. 5.
4. 3.
5. $\frac{7}{4}$.
6. 4, —1.
7. 24.
8. 6.
9. 3.
10. —1.

11. —3.
12. 3, 4.
13. 2, 3.
14. $\frac{9}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{193}$.
15. ±3.
16. 3, —1.
17. 3.
18. 4,31718.
19. 2, —1.
20. 5
21. 2, $\frac{13}{21}$.
22. 5395,8, 1,8533.
23. 10.
24. 2, 3.

CAPITULO XVIII

Págs. 389 - 394

4. $57\frac{19}{24}$; $32\frac{23}{24}$.
6. a) 84; c) 248, 656;
   d) $38\frac{1}{4}$; f) —246.
7. b) 10; c) 9; d) 14.
8. 92.
9. 95.
10. a) 1230; c) 1029;
    d) 1105; f) 1200;
    g) 252 h) 1008.
11. c) 15; d) 15;
    e) 45, —40; f) 10.
12. a) 6; c) 15;
    d) $\frac{35}{11}$ e) $-\frac{169}{17}$.
13. c) 17; d) 11, 15; e) 9;
    f) 18.
14. 39, 55, 71.
16. d = 16.
17. 243.
18. 17.
19. 1152.
23. 12, 116 y 8.
28. 0; 750.
30. n(n+1); n^2.
32. a=9, d=7.
33. 19, 25, 31...
34. a=8, d=5.
35. 8, 13, 18...
36. a=5, d=2.
37. E° 1 820, 13 pagos.
38. E° 25 y E° 100.
39. 5 jin., E° 180.
40. a=65, u=95.
41. 93,1 m, 490 m.
42. 5, 8 y 11.
43. 12, 16 y 20.
44. 30°, 60° y 90°.
45. 63, 84 y 105.
46. 3, 6 y 9.
47. 3, 5, 7 y 9.
48. 2, 5, 8...
49. 0 y 3, —12 y 4,2.
50. 45, 60 y 75.
51. 12, 15 y 18.
52. —2 y 2, $\frac{32}{3}$ y —

CAPITULO XIX

Págs. 404 - 412

2. b) $\frac{1}{4}$, c) ab,
   d) $a\sqrt{3}$, e) $\frac{3x}{4y}$.
4. ±72.
5. ±105.
7. 512, 8192.
9. 2, $\frac{1}{128}$.
10. —384, 12 288.
11. b) 6; c) 5; d) 7.
12. ±21, 63 y ±189.
13. 60, 360, 2 160 y 12 960.
14. 6.
15. ±576.
16. 2 430.
17. 3, 6, 12...
18. q = ±4.
19. 4 374.
20. a) 728; d) 1 820;
    f) —; h) —.
21. n=6, u=25 000.
22. a=3, u=48.
24. a=6, n=8.
26. a=20, S=—1 700.
27. q=4, S=2 387;
    q=—4, S=1 435.
28. q=3, n=6.
32. q=$\frac{1}{3}$, S=6 440.
33. 6, 12, 24...; —9, 27,
    —81...
34. 1 048 576.
35. $ 640, $ 1 275.
36. 8, 24, 72 y 216.
37. 32, 16, 8 y 4.
38. 6, 30 y 150; 98, —154
    y 242.
39. 3, 6 y 12.
40. 9°, 27°, 81° y 243°.
41. 4, 12 y 36.
42. 5, 15 y 45 cm.
43. a=1, q=3;
    a=$\frac{13}{7}$, q=—3.
44. E° 1 700.
45. E° 189 090.
46. —4, —12 y —36; —$\frac{4}{3}$,
    $\frac{20}{9}$ y —$\frac{100}{27}$.
47. 1) G: 4, 10 y 25;
       A: 4, 19 y 16.
    2) G: 4, $\frac{5}{2}$ y $\frac{25}{16}$;
       A: 4, $\frac{5}{2}$ y 1.
48. a) 18; b) 96; c) $13\frac{1}{2}$;
    d) $-12\frac{1}{2}$; e) $2\frac{1}{4}$; f) $3\frac{5}{9}$;
    g) $8\frac{8}{15}$.
49. a) $17\frac{7}{25}$; b) $2\frac{1}{40}$;
    c) $1\frac{63}{65}$; d) $-2\frac{2}{63}$.
50. a) $\frac{5}{8}$; b) $\frac{11}{35}$;
    c) $\frac{11}{21}$; d) $\frac{19}{31}$.
51. a) $\frac{1}{9}$, $\frac{5}{9}$; b) $\frac{5}{11}$, $\frac{2}{11}$;
    c) $\frac{8}{27}$, $\frac{821}{333}$; d) $\frac{5}{6}$, $\frac{8}{15}$;
    e) $\frac{7}{15}$, $\frac{7}{18}$; f) $\frac{8}{33}$, $\frac{378}{495}$.
52. 6, 2, $\frac{2}{3}$...; 12, —4, $\frac{4}{3}$...

53. $4a(2+\sqrt{2})$; $2a^2$.

54. $3a(3+\sqrt{5})$; $\frac{9}{4}a^2$.

55. $a^3\sqrt{3}$.

56. $4r^2$; $2\pi r^3$.

CAPITULO XX

Págs. 419 - 421

1. a) E° 10 012,72;
   b) E° 20 308,13;
   c) E° 26 446,18;
   d) E° 45 923,80.
2. a) E° 15 388,90;
   b) E° 15 238,35;
3. a) E° 9 700,31;
   b) E° 14 156,58;
   c) E° 12 502,30.
4. E° 3 175,95.
5. E° 27,24.
6. a) E° 3 115,86;
   b) E° 5 410,78;
   c) E° 4 855,80;
   d) E° 6 749,80;
   e) E° 8 864.
7. a) 6%; b) 5%;
   c) 2½%.
8. a) 9 años 6 meses;
   b) 5 años 4 meses 28 días;
   c) 6 años;
   d) 7 años 4 meses 27 días;
   e) 6 años 10 meses 9 días.
9. a) 16 de Octubre de 1964.
   b) 13 de Mayo de 1968.
   c) 17 de Enero de 1967.

CAPITULO XXI

Págs. 427 - 428

1. a) E° 6 363,20;
   b) E° 8 799,30;
   c) E° 13 674,20.
2. E° 14 939,20.
3. a) E° 811,20;
   b) E° 604,60;
   c) E° 859.
4. E° 268,63; E° 45,28.
5. 30.
6. E° 92 088.
7. E° 130 000.
9. E° 32 547,95.

INDICE

SEGUNDA PARTE

CORRESPONDIENTE AL III Enseñanza Media

TERCERA PARTE

CORRESPONDIENTE AL IV Enseñanza Media

CURSO DE
MATEMATICAS ELEMENTALES

ALGEBRA